YAPI STATİĞİ 2

DERS NOTLARI(2-1)

Prof. Dr. Cengiz Dündar

KONULAR

KAYNAKLAR

- Ghali, A., and Neville, A. M., Structural Analysis, Second Edition, Chapman and Hill, 1978.
- Livesley, R. K., Matrix Methods of Structural Analysis, Pergamon, 1975.
- Laursen, H. I., Structural Analysis, McGraw-Hill, 1978.
- F. Arbabi, "Structural Analysis and behavior", McGraw-Hill, Inc., 1991, Singapore

- Coates, R. C., Couite, M. G., Kong, F. K., Structural Analysis, Nelson, 1978
- R. C. Hibbeler , "Structural Analysis", Prentice Hall Int., Eighth Edition in SI Units, Singapore, 2011.
- H. H. West, "Fundamentals of Structural Analysis", John Wiley and Sons, Inc., 1993, Singapore.
- Çakıroğlu, A., Özden, E., Özmen, G., Yapı Sistemlerinin Hesabı için Matris Metotları, I, II, İTÜ Küt., 1970.

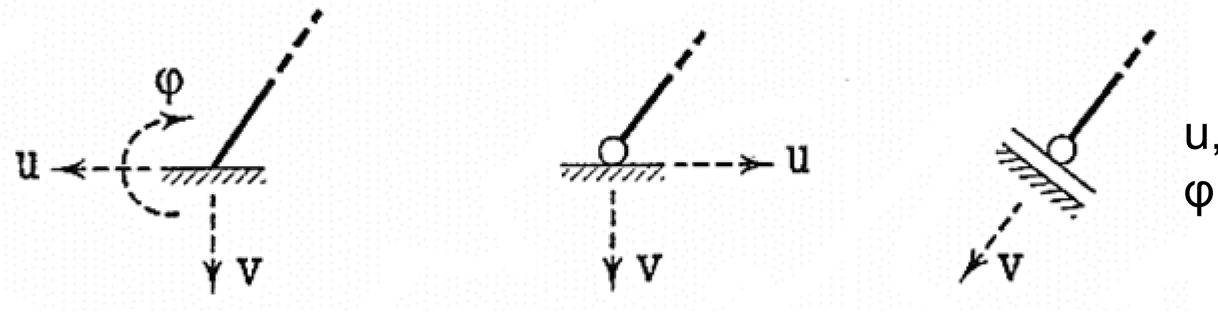
- FF. Karadoğan, S. Pala, E. Yüksel ve Y. Durgun, "Yapı Mühendisliğine Giriş Yapısal Çözümleme Cilt I, Cilt II", Birsen Yayınevi, İstanbul, 2011.
- Tezcan, S., Çubuk Sistemlerinin Elektronik Hesap Makineleri ile Çözümü, İTÜ Küt. 1970
- Dündar, C., Kıral, E., Mengi, Y., Yapı Mekaniğinde Bilgisayar Programları, Genişletilmiş 3. Baskı, Teknik Yayınevi, 1987.
- Dündar, C., Kıral, E., Perdeli Yapı Sistemlerinin Bilgisayar ile Hesabı, TMMOB, İnşaat Mühendisleri Odası, Ankara, 1986. .

HİPERSTATİK SİSTEMLER

- Yapı sistemleri çözümlenirken temel amaç o yapı sisteminde dış etkilerden meydana gelen kesit tesirlerinin, deformasyonların ve deplasmanların tayin edilmesidir.
- İzostatik sistemlerde yalnız denge denklemleri yardımıyla mesnet tepkileri, iç kuvvetler ve deplasmanlar bulunabiliyor iken, hiperstatik sistemlerde mesnet tepkileri, iç kuvvetler ve deplasmanların bulunabilmesi için denge denklemlerine ek olarak süreklilik şartları denilen geometrik uygunluk şartları ile gerilme-deformasyon bağıntılarının eklenmesi gerekir.
- Daha önceki bölümlerde belirtildiği gibi bu bölümde de deplasmanların küçük olduğu ve gerilme deformasyon (σ – ε) ilişkisinin lineer olduğu kabul edilecektir.

- Hiperstatik sistemlerde kesit tesiri meydana getiren etkiler;

1) Dış yükler
2) Sıcaklık değişimi
3) Rötre
4) Mesnet çökmeleridir. (Mesnetlerin tanımına uygun olmayan yer değiştirmeler)



u, v lineer mesnet çökmeleri
φ açısal mesnet dönmesi

- İzostatik sistemlerde mesnet çökmeleri ve sıcaklık değişiminden yalnız deplasmanlar meydana gelir. Hiperstatik sistemlerde ise deplasmanlarla birlikte kesit tesirleri de meydana gelmektedir.

HİPERSTATİK SİSTEMLERİN ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

1. Kuvvet Yöntemi
2. Deplasman Yöntemleri
   a) Açı Yöntemi
   b) Cross Yöntemi
3. Rijitlik Matrisi Yöntemi

1. KUVVET YÖNTEMİ

- Bir sistemin tüm mesnet tepkilerinin ve kesit tesirlerinin elde edilebilmesi için denge denklemlerine eklenmesi gereken denklem sayısına **sistemin hiperstatiklik derecesi** denir. Bunu belirleyebilmek için sistemde bazı kesimler yapılarak sistem izostatik hale getirilmelidir.
- Bir hiperstatik sistemde kesimler yapılarak bazı kesit tesirleri ve/veya mesnet tepkilerinin kaldırılmasıyla elde edilen taşıyıcı sisteme **İzostatik sistem** denir. İzostatik sistemler içinde hesapta en kolaylık sağlayan sisteme **İzostatik esas sistem** denir. Bir hiperstatik sistemden çok sayıda izostatik esas sistem elde edilebilir.

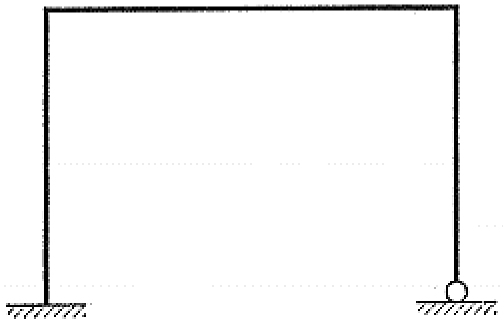
1. KUVVET YÖNTEMİ

- Kuvvet yöntemi ile hiperstatik sistemlerin hesabında tüm işlemler izostatik esas sistemler üzerinde yürütülerek hiperstatik sisteme ait çözüm elde edilir.
- Hiperstatik bir sistemi izostatik sistem haline getirmek için kaldırılan mesnet tepkileri ve kesit tesirlerinin sayısı o sistemin **Hiperstatiklik derecesini** vermektedir.
- Kuvvet yönteminde bilinmeyenler, verilen bir hiperstatik sistemi izostatik hale getirmek için kaldırılan mesnet reaksiyonları ve/veya kesit tesirleridir.

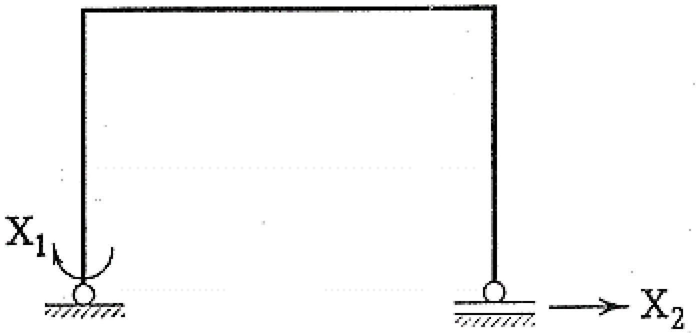
1. KUVVET YÖNTEMİ

- Sistemi İzostatik hale getirilebilmek için yalnızca mesnet tepkilerinin kaldırılması yeterli olan sistemlere dıştan hiperstatik, yalnızca kesit tesirlerinden bazılarının kaldırılması yeterli olan sistemlere ise içten hiperstatik sistemler denilmektedir.
- Hem mesnet tepkilerinin hem de kesit tesirlerinin kaldırılmasıyla izostatik hale gelen hiperstatik sistemlere ise içten ve dıştan hiperstatik sistemler denilmektedir.

n=3x0+5-0-3=2   2. derece dıştan hiperstatik



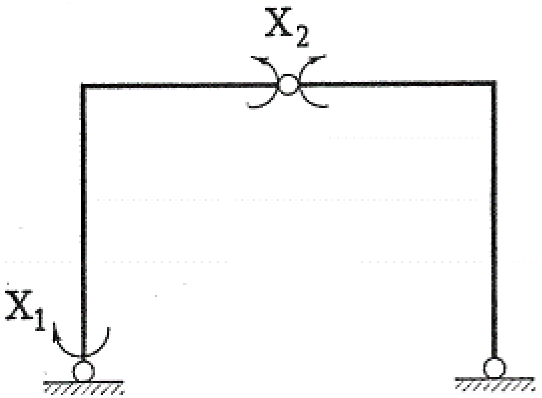
hiperstatik sistem



izostatik esas sistem

X_1, X_2 hiperstatik bilinmeyenler

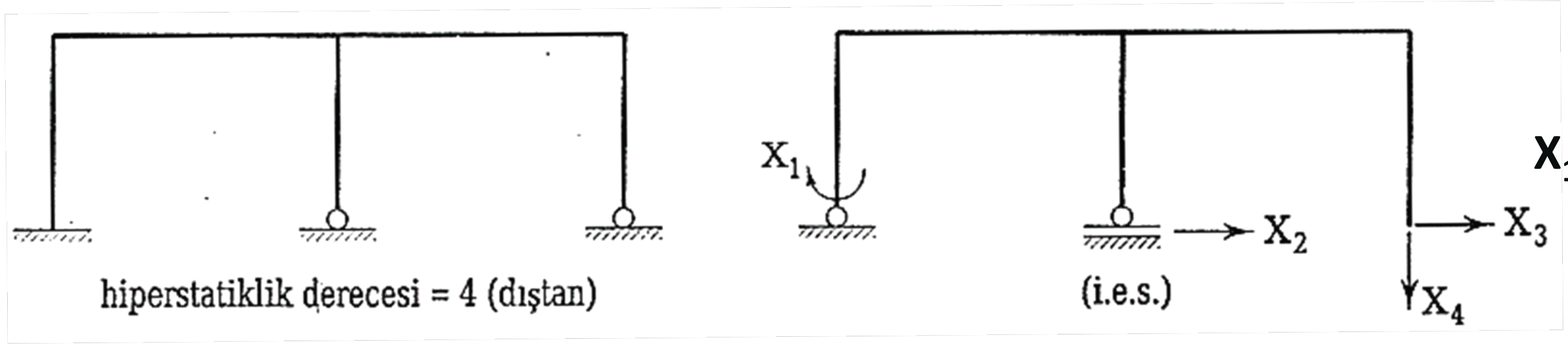
hiperstatiklik derecesi = 2

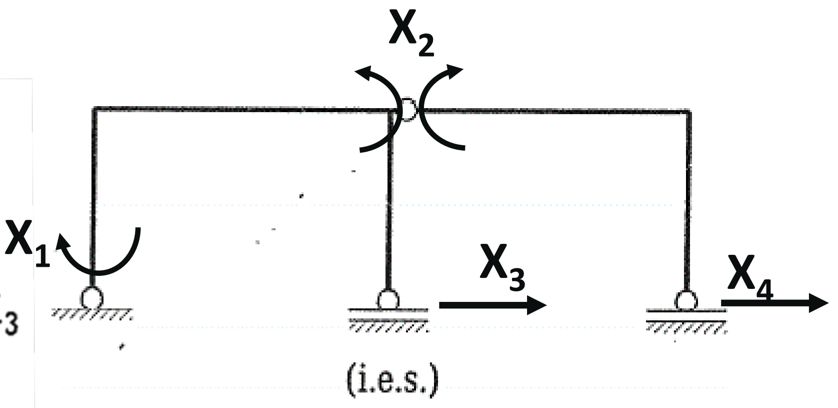


i.e.s.

Yapı sistemlerinin hiperstatiklik derecesi belirlenirken $\boxed{n = 3\times k + r - m - 3}$ formülü kullanılacaktır. Bu formülde; n : hiperstatiklik derecesi , k : sistemdeki toplam kapalı göz sayısı , r : sistemdeki toplam mesnet tepkisi sayısı , m : sistemdeki toplam ara mafsal sayısıdır.

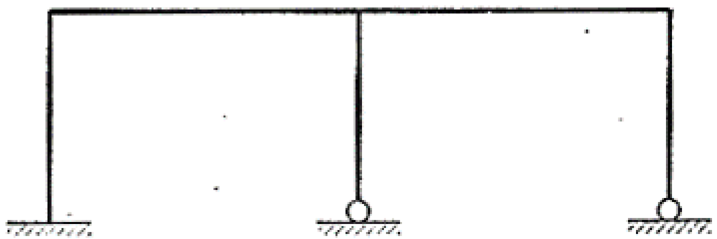
n=3x0+7-0-3=4   4. derece dıştan hiperstatik

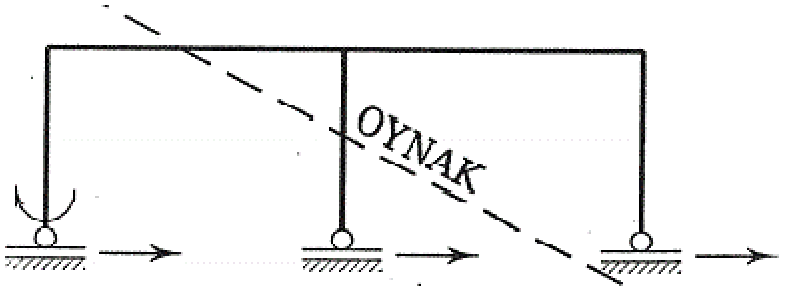




Yapı sistemlerinin hiperstatiklik derecesi belirlenirken $\boxed{n = 3\times k + r - m - 3}$ formülü kullanılacaktır. Bu formülde; n : hiperstatiklik derecesi , k : sistemdeki toplam kapalı göz sayısı , r : sistemdeki toplam mesnet tepkisi sayısı , m : sistemdeki toplam ara mafsal sayısıdır.

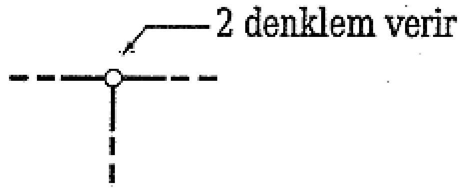
n=3x0+7-0-3=4 4. derece dıştan hiperstatik



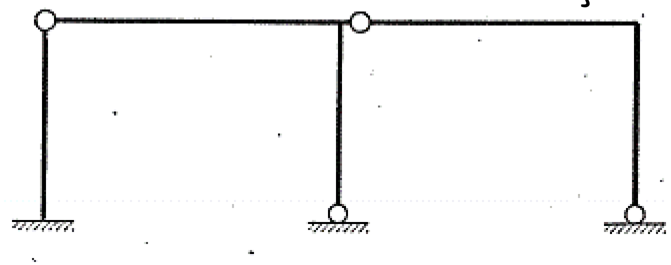


hiperstatiklik derecesi = 4 (dıştan)

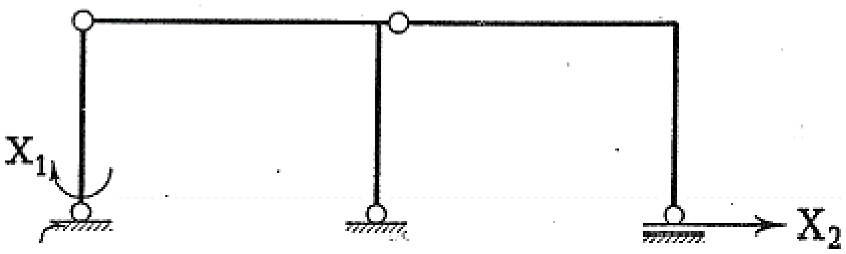
Not:



n=3x0+7-2-3=2 2. derece dıştan hiperstatik



hiperstatiklik derecesi = 2 (dıştan)



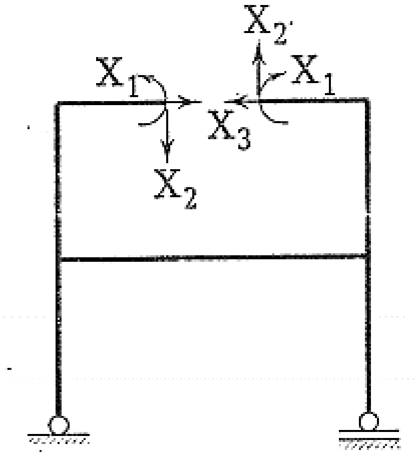
(i.e.s.)

Yapı sistemlerinin hiperstatiklik derecesi belirlenirken $\boxed{n = 3\times k + r - m - 3}$ formülü kullanılacaktır. Bu formülde; n : hiperstatiklik derecesi , k : sistemdeki toplam kapalı göz sayısı , r : sistemdeki toplam mesnet tepkisi sayısı , m : sistemdeki toplam ara mafsal sayısıdır.

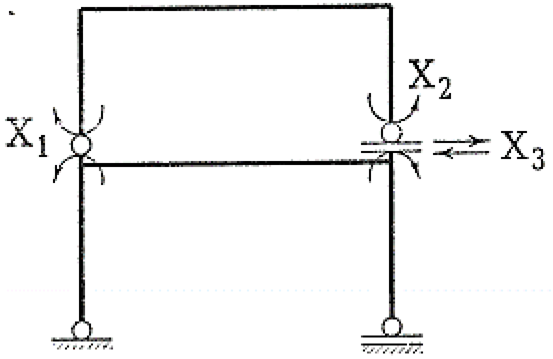
Dıştan izostatik

n=3.1+3-0-3=3

3. derece içten hiperstatik

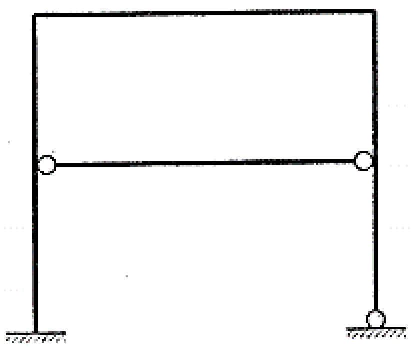


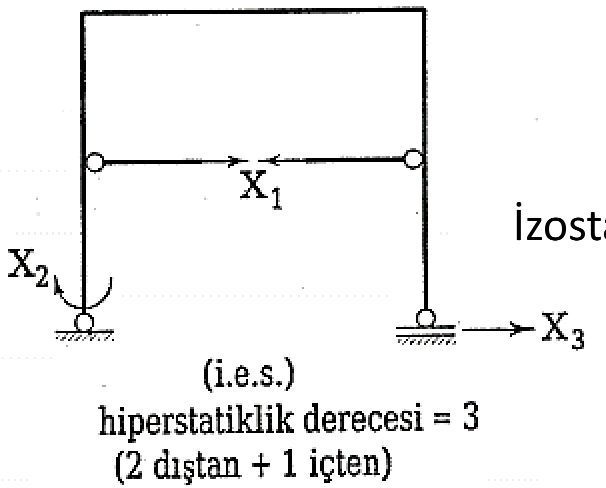
(i.e.s.)



(i.e.s.)

Yapı sistemlerinin hiperstatiklik derecesi belirlenirken $\boxed{n = 3 \times k + r - m - 3}$ formülü kullanılacaktır. Bu formülde; n : hiperstatiklik derecesi , k : sistemdeki toplam kapalı göz sayısı , r : sistemdeki toplam mesnet tepkisi sayısı , m : sistemdeki toplam ara mafsal sayısıdır.



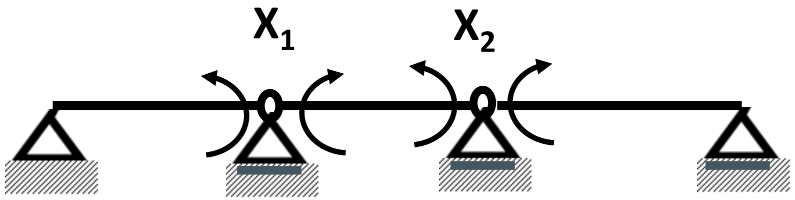


İzostatik esas sistem

Dıştan izostatik
n=3.1+5-2-3=3
2 dıştan 1 içten hiperstatik

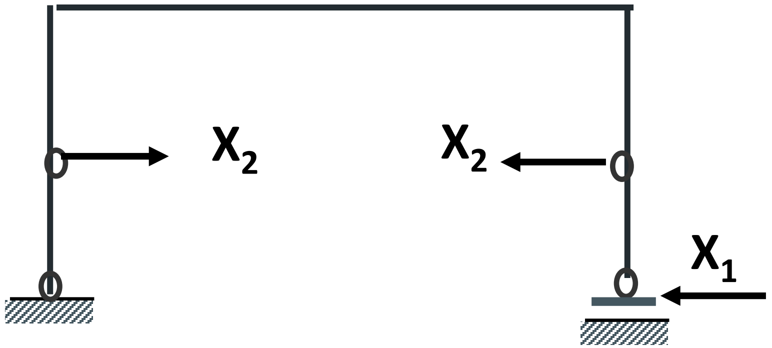
Hiperstatik sistem

İzostatik esas sistem

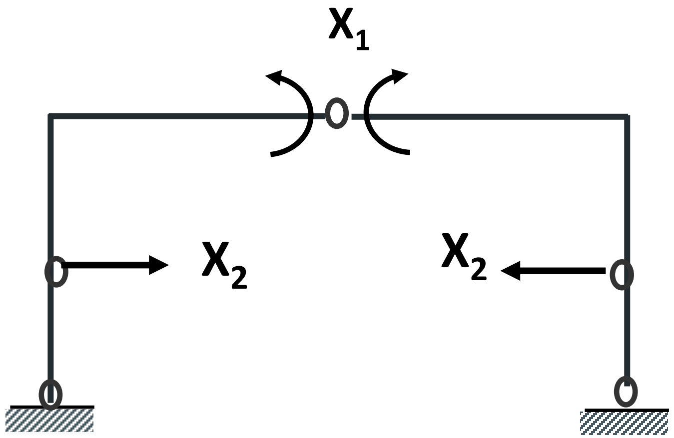


İzostatik esas sistem

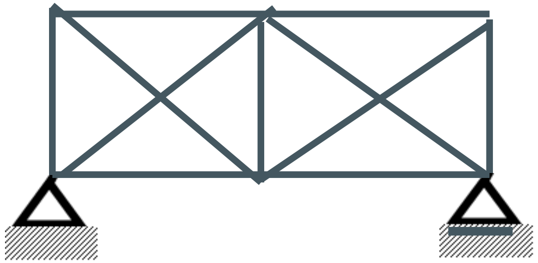
Hiperstatik sistem



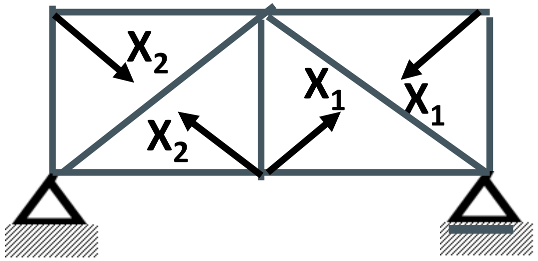
İzostatik esas sistem



İzostatik esas sistem



Hiperstatik sistem



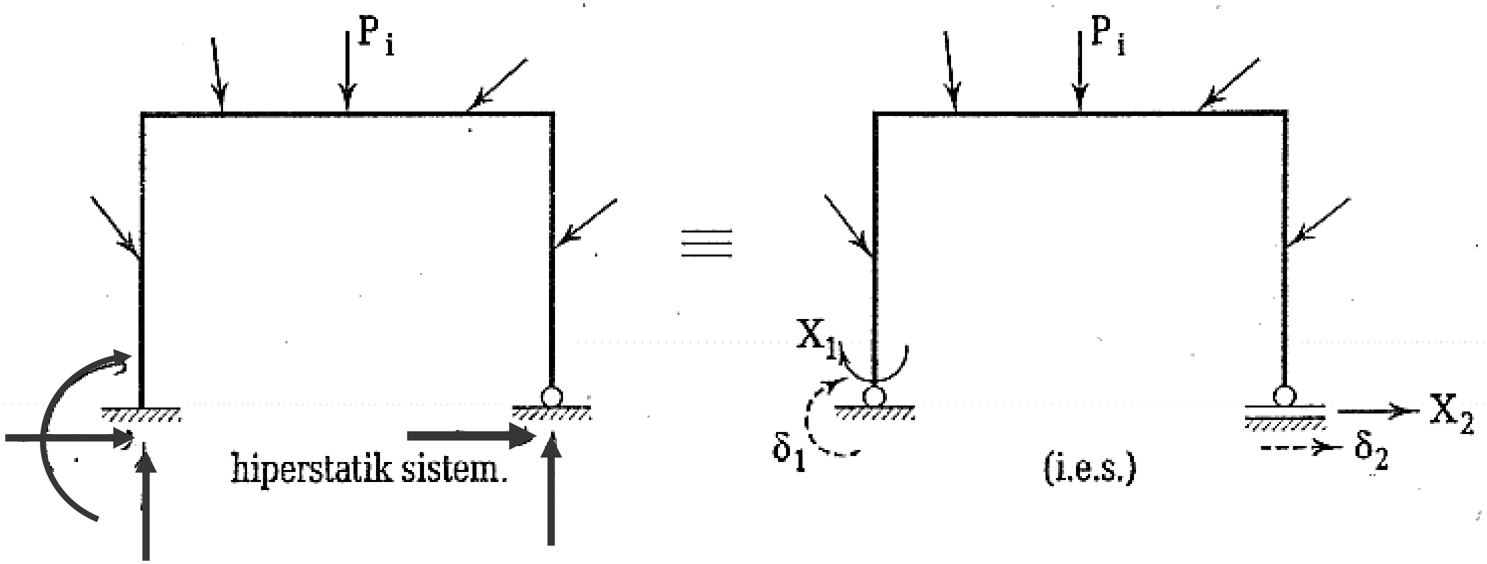
İzostatik esas sistem

KUVVET YÖNTEMİNİN PRENSİBİ

- Hiperstatik sistemde dış etkilerden dolayı oluşan kesit tesirleri, yer değiştirmeler ve şekil değiştirmeler,

İzostatik sistemde; dış etkilerden ve hiperstatik bilinmeyenlerden dolayı oluşan kesit tesirleri, yer değiştirmeler ve şekil değiştirmelerin toplamına eşittir. (süperpozisyon prensibi)

Bahsi geçen hiperstatik bilinmeyenler, bilinmeyenler doğrultularında yazılacak olan geometrik uygunluk koşullarından yararlanılarak hesaplanırlar.



Süreklilik Denklemleri:

$$\delta_1 = \delta_{10} + \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 = 0$$

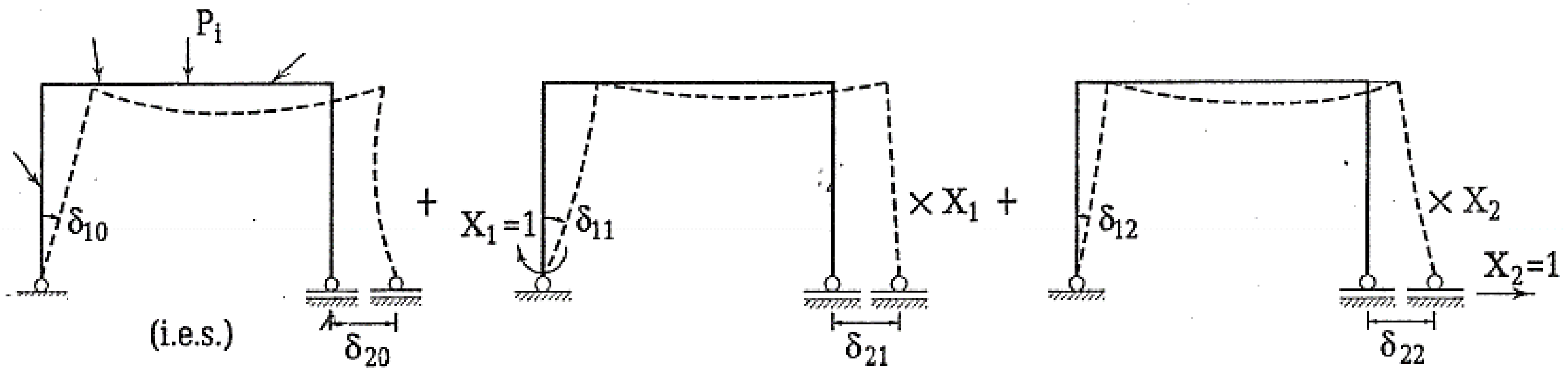
$$\delta_2 = \delta_{20} + \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 = 0$$

Süperpozisyon Denklemleri:

$$M = M_0 + M_1 X_1 + M_2 X_2$$

$$N = N_0 + N_1 X_1 + N_2 X_2$$

$$T = T_0 + T_1 X_1 + T_2 X_2$$



X=0 durumu	X_1=1 durumu	X_2=1 durumu
Kesit zorları: M_0, N_0, T_0	M_1, N_1, T_1	M_2, N_2, T_2
Yerdeğiştirmeler: δ_{10}, δ_{20}	δ_{11}, δ_{21}	δ_{12}, δ_{22}

δ_{10} , δ_{20} , δ_{11} , $\delta_{12} = \delta_{21}$, δ_{22} yerdeğiştirmeleri virtüel iş teoremi yardımıyla hesaplanarak süreklilik denklemleri sayısal olarak yazılır ve çözülerek X_1 , X_2 hiperstatik bilinmeyenleri bulunur. Sonra süperpozisyon denklemleriyle hiperstatik sistemin kesit zorları diyagramları elde edilir.

δ_{10} **İzostatik esas sistemde dış kuvvetlerden X_1 bilinmeyen kuvvetin tatbik noktasındaki deplasmanın X_1 üzerindeki iz düşümü**

δ_{20} **İzostatik esas sistemde dış kuvvetlerden X_2 bilinmeyen kuvvetin tatbik noktasındaki deplasmanın X_2 üzerindeki iz düşümü**

δ_{ij} **X_j kuvvetinden dolayı X_i kuvvetinin tatbik noktasında meydana gelen deplasmanın X_i doğrultusunda iz düşümü**

$X = 0$ yüklemesi:

İzostatik esas sisteme yalnız dış yükler etkitilir. Bu durumda meydana gelen kesit zorları diyagramları M_0 , N_0 , T_0 ile gösterilir.

$X_i = 1$ yüklemeleri:

İzostatik esas sisteme yalnız X_i hiperstatik bilinmeyeninin birim değeri etkitilir. Bu durumda oluşan kesit zorları diyagramları M_i , N_i , T_i ile gösterilir. Bir hiperstatik sistemin hesabında hiperstatiklik derecesi kadar (i=1, 2, 3, ...,n ; n: hiperstatiklik derecesi) birim yükleme yapılması gerekmektedir.

M, N, T	Hiperstatik sistemdeki kesit tesirleri
M_0, T_0, N_0	İzostatik esas sistemde sadece dış yüklerden dolayı meydana gelen kesit tesirleri
M_1, T_1, N_1	İzostatik esas sistemde sadece X_1=1 den dolayı meydana gelen kesit tesirleri
M_2, T_2, N_2	İzostatik esas sistemde sadece X_2=1 den dolayı meydana gelen kesit tesirleri

SÜPERPOZİSYON DENKLEMLERİ

Hiperstatik sistemde dış etkilerden meydana gelen büyüklükler (kesit zorları, şekildeğiştirmeler, yerdeğiştirmeler, mesnet tepkileri), izostatik esas sistemde dış yüklerden ve hiperstatik bilinmeyenlerden oluşan büyüklüklerin toplamına eşittir.

Buna göre, süperpozisyon denklemleri aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\left.\begin{aligned}
M &= M_0 + M_1X_1 + M_2X_2 + M_3X_3 + \ldots\ldots + M_nX_n = M_0 + \sum_{i=1}^{n} M_iX_i \\
N &= N_0 + N_1X_1 + N_2X_2 + N_3X_3 + \ldots\ldots + N_nX_n = N_0 + \sum_{i=1}^{n} N_iX_i \\
T &= T_0 + T_1X_1 + T_2X_2 + T_3X_3 + \ldots\ldots + T_nX_n = T_0 + \sum_{i=1}^{n} T_iX_i \\
R &= R_0 + R_1X_1 + R_2X_2 + R_3X_3 + \ldots\ldots + R_nX_n = R_0 + \sum_{i=1}^{n} R_iX_i
\end{aligned}\right\} \text{Süperpozisyon denklemleri}$$

27

SÜPERPOZİSYON DENKLEMLERİ

Burada; M , N , T : Hiperstatik sistemdeki kesit zorlarını

R : Hiperstatik sistemdeki mesnet tepkisini

M_0 , N_0 , T_0 , R_0 : İzostatik esas sistemde dış etkilerden oluşan kesit zorları ve mesnet tepkilerini

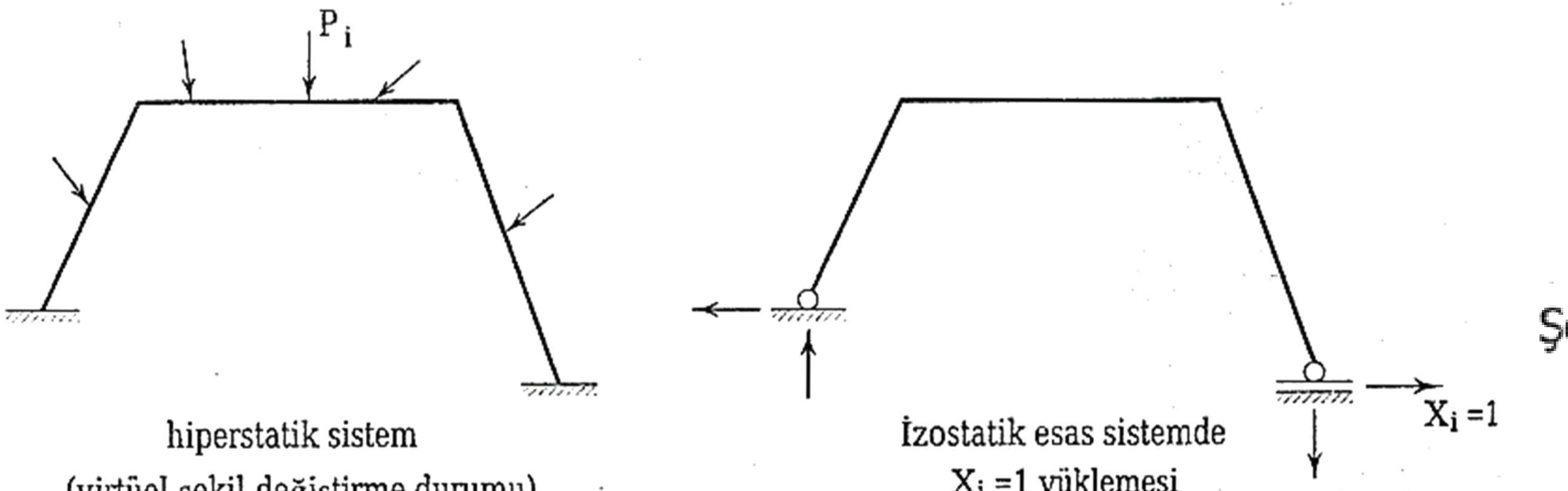
$\sum_{i=1}^{n} M_i X_i$, $\sum_{i=1}^{n} N_i X_i$, $\sum_{i=1}^{n} T_i X_i$, $\sum_{i=1}^{n} R_i X_i$: İzostatik esas sistemde hiperstatik bilinmeyenlerden oluşan kesit zorları ve mesnet tepkilerini ifade etmektedir.

GEOMETRİK UYGUNLUK KOŞULLARI
SÜREKLİLİK DENKLEMLERİ

Bir hiperstatik sistemin kesim yapılan noktalarındaki geometrik uygunluk koşullarını ifade eden denklemlere süreklilik denklemleri denir. Bir hiperstatik sistemde hiperstatiklik derecesi kadar süreklilik denklemi yazılmalıdır. Süreklilik denklemlerinin yazılması için virtüel iş teoreminden yararlanılır.

Herhangi bir süreklilik denkleminin elde edilmesi

Sisteme yalnız dış yüklerin etkidiği gözönüne alınacaktır, sıcaklık değişmesi ve mesnet çökmelerinin bulunmadığı düşünülecektir.



hiperstatik sistem
(virtüel şekil değiştirme durumu)

İzostatik esas sistemde
$X_i = 1$ yüklemesi
(Yükleme durumu)

Kesit zorları : M , N , T $\qquad$ M_i , N_i , T_i

Şekildeğiştirmeler : $\begin{cases} \dfrac{\Delta\varphi}{ds} = \dfrac{M}{EI} \\ \dfrac{\Delta ds}{ds} = \dfrac{N}{EF} \\ \dfrac{\Delta v}{ds} = \dfrac{T}{GF'} \end{cases}$

Hiperstatik sistemde:

herhangi bir kesitteki deformasyonlar:

$$\left.\begin{aligned} \Delta\varphi &= \frac{M}{EI}ds \\ \Delta ds &= \frac{N}{EF}ds \\ \Delta v &= \frac{T}{GF'}ds \end{aligned}\right\} \text{ virtüel deformasyon durumu}$$

İç kuvvetlerin yaptığı iş= Dış kuvvetlerin yaptığı iş

$$\int M_i\Delta\varphi + \int N_i\Delta ds + \int T_i\Delta v = 1.0 \quad \text{i nolu kapalı süreklilik denklemi}$$

İç kuvvetlerin yaptığı iş Dış kuvvetlerin yaptığı iş

$$\int M_i \frac{\Delta\varphi}{ds} ds + \int N_i \frac{\Delta ds}{EF} ds + \int T_i \frac{\Delta v}{ds} ds = 1.0$$

İç kuvvetlerin işi = Dış kuvvetlerin işi

$$\int M_i \frac{\Delta\varphi}{ds} ds + \int N_i \frac{\Delta ds}{ds} ds + \int T_i \frac{\Delta v}{ds} ds = 0 \quad (i=1, 2, 3, \ldots, n)$$

$$\boxed{\int M_i \frac{M}{EI} ds + \int N_i \frac{N}{EF} ds + \int T_i \frac{T}{GF'} ds = 0 \quad (i=1, 2, 3, \ldots, n)}$$ **Kapalı Süreklilik Denklemleri (KSD)**

Şekildeğiştirmeler :

$$\begin{cases} \dfrac{\Delta\varphi}{ds} = \dfrac{M}{EI} \\ \dfrac{\Delta ds}{ds} = \dfrac{N}{EF} \\ \dfrac{\Delta v}{ds} = \dfrac{T}{GF'} \end{cases}$$

M , N , T nin süperpozisyon denklemlerindeki ifadeleri Kapalı Süreklilik Denklemlerinde yerine konulursa; 23

$$\int M_i \frac{M_0 + M_1X_1 + M_2X_2 + M_3X_3 + \ldots + M_nX_n}{EI} ds + \int N_i \frac{N_0 + N_1X_1 + N_2X_2 + N_3X_3 + \ldots + N_nX_n}{EF} ds + \ldots$$

$$\ldots + \int T_i \frac{T_0 + T_1X_1 + T_2X_2 + T_3X_3 + \ldots + T_nX_n}{GF'} ds = 0$$

$$\Rightarrow \int M_i \frac{M_0}{EI} ds + X_1 \int M_i \frac{M_1}{EI} ds + X_2 \int M_i \frac{M_2}{EI} ds + X_3 \int M_i \frac{M_3}{EI} ds + \ldots + X_n \int M_i \frac{M_n}{EI} ds + \ldots$$

$$\ldots + \int N_i \frac{N_0}{EF} ds + X_1 \int N_i \frac{N_1}{EF} ds + X_2 \int N_i \frac{N_2}{EF} ds + X_3 \int N_i \frac{N_3}{EF} ds + \ldots + X_n \int N_i \frac{N_n}{EF} ds + \ldots$$

$$\ldots + \int T_i \frac{T_0}{GF'} ds + X_1 \int T_i \frac{T_1}{GF'} ds + X_2 \int T_i \frac{T_2}{GF'} ds + X_3 \int T_i \frac{T_3}{GF'} ds + \ldots + X_n \int T_i \frac{T_n}{GF'} ds = 0$$

$$\overbrace{\int M_i \frac{\Delta\varphi}{ds} ds + \int N_i \frac{\Delta ds}{EF} ds + \int T_i \frac{\Delta v}{ds} ds}^{\text{İç kuvvetlerin yaptığı iş}} = \overbrace{1.0}^{\text{Dış kuvvetlerin yaptığı iş}}$$

Şekildeğiştirmeler : $\begin{cases} \dfrac{\Delta\varphi}{ds} = \dfrac{M}{EI} \\ \dfrac{\Delta ds}{ds} = \dfrac{N}{EF} \\ \dfrac{\Delta v}{ds} = \dfrac{T}{GF'} \end{cases}$

$$\Rightarrow \int M_i \frac{M_0}{EI} ds + X_1 \int M_i \frac{M_1}{EI} ds + X_2 \int M_i \frac{M_2}{EI} ds + X_3 \int M_i \frac{M_3}{EI} ds + \ldots\ldots + X_n \int M_i \frac{M_n}{EI} ds + \ldots\ldots..$$

$$\ldots\ldots.. + \int N_i \frac{N_0}{EF} ds + X_1 \int N_i \frac{N_1}{EF} ds + X_2 \int N_i \frac{N_2}{EF} ds + X_3 \int N_i \frac{N_3}{EF} ds + \ldots\ldots + X_n \int N_i \frac{N_n}{EF} ds + \ldots\ldots..$$

$$\ldots\ldots.. + \int T_i \frac{T_0}{GF'} ds + X_1 \int T_i \frac{T_1}{GF'} ds + X_2 \int T_i \frac{T_2}{GF'} ds + X_3 \int T_i \frac{T_3}{GF'} ds + \ldots\ldots + X_n \int T_i \frac{T_n}{GF'} ds = 0$$

$$\underbrace{[\int M_1 \frac{M_1}{EI} ds + \int N_1 \frac{N_1}{EF} ds + \int T_1 \frac{T_1}{GF'} ds]}_{\delta_{11}} X_1 + \underbrace{[\int M_1 \frac{M_2}{EI} ds + \int N_1 \frac{N_2}{EF} ds + \int T_1 \frac{T_2}{GF'} ds]}_{\delta_{12}} X_2 + \cdots$$

$$\underbrace{[\int M_1 \frac{M_n}{EI} ds + \int N_1 \frac{N_n}{EF} ds + \int T_1 \frac{T_n}{GF'} ds]}_{\delta_{1n}} X_n + \underbrace{[\int M_1 \frac{M_0}{EI} ds + \int N_1 \frac{N_0}{EF} ds + \int T_1 \frac{T_0}{GF'} ds]}_{\delta_{10}} = 0$$

Burada;

$$\delta_{i0} = \int M_i \frac{M_0}{EI} ds + \int N_i \frac{N_0}{EF} ds + \int T_i \frac{T_0}{GF'} ds$$

$$\delta_{i1} = \int M_i \frac{M_1}{EI} ds + \int N_i \frac{N_1}{EF} ds + \int T_i \frac{T_1}{GF'} ds$$

$$\delta_{i2} = \int M_i \frac{M_2}{EI} ds + \int N_i \frac{N_2}{EF} ds + \int T_i \frac{T_2}{GF'} ds$$

$$\delta_{i3} = \int M_i \frac{M_3}{EI} ds + \int N_i \frac{N_3}{EF} ds + \int T_i \frac{T_3}{GF'} ds$$

$$\delta_{in} = \int M_i \frac{M_n}{EI} ds + \int N_i \frac{N_n}{EF} ds + \int T_i \frac{T_n}{GF'} ds$$

$$\Rightarrow \delta_{i1}X_1 + \delta_{i2}X_2 + \delta_{i3}X_3 + \ldots\ldots + \delta_{in}X_n + \delta_{i0} = 0 \quad (i=1, 2, 3, \ldots\ldots, n)$$

1 nolu açık süreklilik denklemi

i=1, 2, 3,......, n için bu denklemler açık şekilde yazılırsa;

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \ldots\ldots + \delta_{1n}X_n + \delta_{10} = 0$$
$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \ldots\ldots + \delta_{2n}X_n + \delta_{20} = 0$$
$$\delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \ldots\ldots + \delta_{3n}X_n + \delta_{30} = 0$$

....

....

....

$$\delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \delta_{n3}X_3 + \ldots\ldots + \delta_{nn}X_n + \delta_{n0} = 0$$

olarak **Açık Süreklilik Denklemleri** elde edilir.

Açık süreklilik denklemindeki katsayı ve sabitlerin eldesi

δ_{ik}: $X_k = 1$ yüklemesinden dolayı X_i bilinmeyeni doğrultusundaki yerdeğiştirmedir. Denklem takımının katsayıları adını alır. Bu terim

$$\delta_{ik} = \int \frac{M_i M_k}{EI} ds + \int \frac{N_i N_k}{EF} ds + \int \frac{T_i T_k}{GF'} ds$$

şeklinde elde edilir.

Betti karşıtlık teoremi uyarınca $\delta_{ik} = \delta_{ki}$ bağıntısı vardır.

δ_{i0} : İzostatik esas sistemde dış yüklerden dolayı X_i hiperstatik bilinmeyeni doğrultusundaki yerdeğiştirmedir. Yük sabiti adını alır. Bu terim

$$\delta_{i0} = \int M_i \frac{M_0}{EI} ds + \int N_i \frac{N_0}{EF} ds + \int T_i \frac{T_0}{GF'} ds$$

şeklinde elde edilir.

Özel Haller

1- Uzama ve kayma şekildeğiştirmelerinin terkedilmesi halinde

$$\delta_{ik} = \int \frac{M_i M_k}{EI} ds$$

$$\delta_{i0} = \int M_i \frac{M_0}{EI} ds$$

olarak dikkate alınır.

2- Kafes sistemlerde; normal kuvvetler çubuk boyunca sabit olduğundan iş terimlerindeki integral ifadeleri ortadan kalkar, bunun yerine sözkonusu terimler

$$\delta_{ik} = \sum_{\text{tüm çubuklar}} \frac{S_i S_k}{EF} L$$

$$\delta_{i0} = \sum_{\text{tüm çubuklar}} \frac{S_i S_0}{EF} L$$

şeklinde elde edilirler. Burada,

S_0 , S_i , S_k : İzostatik esas sistemdeki çubuklarda sırasıyla dış yüklerden ve birim yüklemelerden oluşan çubuk kuvvetleridir.

L : Çubuk boyu

HESAPTA İZLENEN YOL

1- İzostatik esas sistem seçilir ve hiperstatik bilinmeyenler belirlenir.

2- $X = 0$ yüklemesi yapılarak M_0, N_0, T_0 diyagramları çizilir. Uzama ve kayma şekildeğiştirmelerinin terkedilmesi halinde N_0 ve T_0 diyagramlarının çizimine gerek yoktur.

3- $X_i = 1$ birim yüklemeleri yapılarak M_i, N_i, T_i (uzama ve kayma şekildeğiştirmeleri terkediliyorsa yalnız M_i) diyagramları çizilir. Bu işlemler n kere tekrarlanır.

4- Denklem takımının δ_{ik} katsayıları, δ_{i0} yükleme sabitleri hesaplanır. Bu terimlerin hesabı için çarpım tablolarından yararlanılır. δ_{ik} ve δ_{i0} terimlerinde paydadaki EI katsayısından kurtulmak için denklem takımının tüm katsayı ve sabitleri ortak bir EI katsayısı ile çarpılır. Buna göre, δ_{ik} ve δ_{i0} terimleri yerine $EI_c\delta_{ik} = \int M_i M_k \frac{I_c}{I} ds$, $EI_c\delta_{i0} = \int M_i M_0 \frac{I_c}{I} ds$ terimleri hesaplanır. Burada I_c, herhangi bir atalet momentidir ve genellikle çubukların atalet momentlerinin en küçük ortak katı olarak seçilir.

5- Süreklilik denklemleri sayısal olarak yazılır ve çözülerek X_i hiperstatik bilinmeyenleri bulunur.

6- Hiperstatik sistemlerin kesit zorları diyagramları çizilir. Bunun için iki yoldan yararlanılabilir.

a) Süperpozisyon denklemleri ile $(M = M_0 + M_1X_1 + M_2X_2 + \ldots.. + M_nX_n)$

b) İzostatik esas sisteme dış yükler ve hiperstatik bilinmeyenler bir arada etkitilir ve diyagramlar çizilir.

7- Sonuçlar kontrol edilir. Kontrol için Kapalı Süreklilik Denklemlerinden (KSD) yararlanılır. Hiperstatik sistemin çözümünün doğru olması halinde çözüme ait M, N, T diyagramları $\int M_i \frac{M}{EI} ds + \int N_i \frac{N}{EF} ds + \int T_i \frac{T}{GF'} ds = 0$ (i=1, 2, 3,....,n) KSD yi en çok %0.5 ile %1 rölatif hata ile sağlamalıdır. KSD ile kontrol genel olarak i=1, 2, 3,.....,n için n kere yapılmalıdır.

$$\text{Rölatif hata} = \frac{\text{Tüm terimlerin cebrik toplamı}}{\text{(+) ve (–) terimlerin toplamlarının mutlak değerlerinin ortalaması}}$$

Not: Rölatif hata hesaplanırken paydada bulunan (+) ve (-) terimlerin ortalaması yerine, (+) terimlerin toplamı ile (-) terimlerin toplamının mutlak değeri karşılaştırılarak bunlardan en küçük olan dikkate alınabilir.

Rölatif hatanın bulunması ile ilgili sayısal örnek

1) (+) terimlerin toplamı : 20.5

(-) terimlerin toplamı : -20.4

20.5-20.4=0.1

$$\Rightarrow \text{rölatif hata} = \frac{0.1}{\frac{1}{2} \times (20.5 + 20.4)} \cong \%0.5$$

ÖNEMLİ NOTLAR

Uzama ve kayma şekildeğiştirmelerinin terkedilmesi halinde Kapalı Süreklilik Denklemi

★ $$\int \frac{M_i M}{EI} ds = 0 \quad (i=1, 2, 3,.....,n)$$

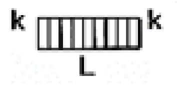
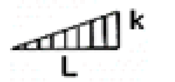
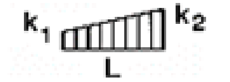
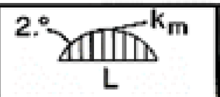
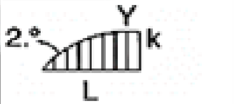
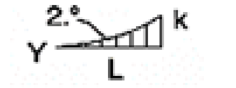
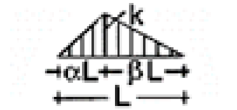
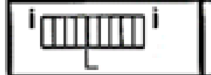
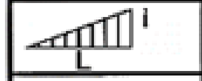
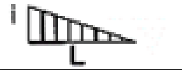
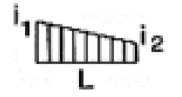
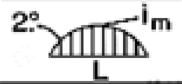
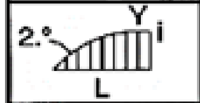
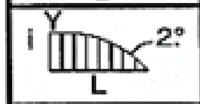
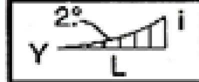
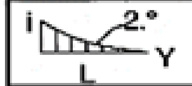
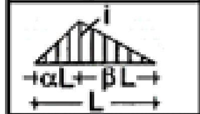
halini alır.

δ_{ik} , δ_{i0} terimleri yerine $EI_c\delta_{ik}$, $EI_c\delta_{i0}$ terimleri kullanılıyorsa Kapalı Süreklilik Denklemi

★ $$\int M_i M \frac{I_c}{I} ds = 0 \quad (i=1, 2, 3,.....,n)$$

olarak yazılmalıdır.

ÇARPIM TABLOSU ($\int_0^L M_i M_k \, ds$)

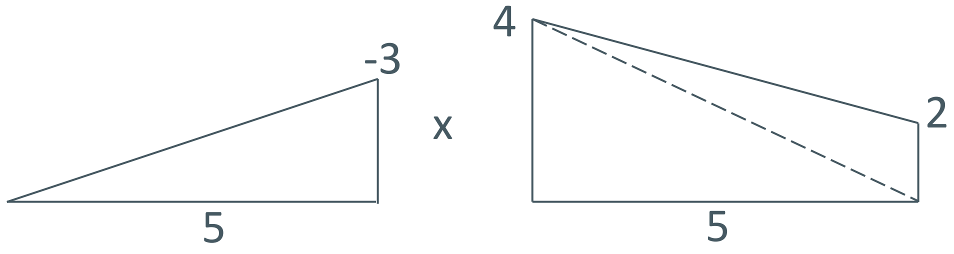
							
	Lik	$\frac{1}{2}Lik$	$\frac{1}{2}Li(k_1+k_2)$	$\frac{2}{3}Lik_m$	$\frac{2}{3}Lik$	$\frac{1}{3}Lik$	$\frac{1}{2}Lik$
	$\frac{1}{2}Lik$	$\frac{1}{3}Lik$	$\frac{1}{6}Li(k_1+2k_2)$	$\frac{1}{3}Lik_m$	$\frac{5}{12}Lik$	$\frac{1}{4}Lik$	$\frac{1}{6}L(1+\alpha)ik$
	$\frac{1}{2}Lik$	$\frac{1}{6}Lik$	$\frac{1}{6}Li(2k_1+k_2)$	$\frac{1}{3}Lik_m$	$\frac{1}{4}Lik$	$\frac{1}{12}Lik$	$\frac{1}{6}L(1+\beta)ik$
	$\frac{1}{2}L(i_1+i_2)k$	$\frac{1}{6}L(i_1+2i_2)k$	$\frac{1}{6}L(2i_1k_1+i_1k_2+i_2k_1+2i_2k_2)$	$\frac{1}{3}L(i_1+i_2)k_m$	$\frac{1}{12}L(3i_1+5i_2)k$	$\frac{1}{12}L(i_1+3i_2)k$	$\frac{1}{6}Lk[(1+\beta)i_1+(1+\alpha)i_2]$
	$\frac{2}{3}Li_mk$	$\frac{1}{3}Li_mk$	$\frac{1}{3}Li_m(k_1+k_2)$	$\frac{8}{15}Li_mk_m$	$\frac{7}{15}Li_mk$	$\frac{1}{5}Li_mk$	$\frac{1}{3}L(1+\alpha\beta)i_mk$
	$\frac{2}{3}Lik$	$\frac{5}{12}Lik$	$\frac{1}{12}Li(3k_1+5k_2)$	$\frac{7}{15}Lik_m$	$\frac{8}{15}Lik$	$\frac{3}{10}Lik$	$\frac{1}{12}L(5-\beta-\beta^2)ik$
	$\frac{2}{3}Lik$	$\frac{1}{4}Lik$	$\frac{1}{12}Li(5k_1+3k_2)$	$\frac{7}{15}Lik_m$	$\frac{11}{30}Lik$	$\frac{2}{15}Lik$	$\frac{1}{12}L(5-\alpha-\alpha^2)ik$
	$\frac{1}{3}Lik$	$\frac{1}{4}Lik$	$\frac{1}{12}Li(k_1+3k_2)$	$\frac{1}{5}Lik_m$	$\frac{3}{10}Lik$	$\frac{1}{5}Lik$	$\frac{1}{12}L(1+\alpha+\alpha^2)ik$
	$\frac{1}{3}Lik$	$\frac{1}{12}Lik$	$\frac{1}{12}Li(3k_1+k_2)$	$\frac{1}{5}Lik_m$	$\frac{2}{15}Lik$	$\frac{1}{30}Lik$	$\frac{1}{12}L(1+\beta+\beta^2)ik$
	$\frac{1}{2}Lik$	$\frac{1}{6}L(1+\alpha)ik$	$\frac{1}{6}L[(1+\beta)k_1+(1+\alpha)k_2]$	$\frac{1}{3}L(1+\alpha\beta)ik_m$	$\frac{1}{12}L(5-\beta-\beta^2)ik$	$\frac{1}{12}L(1+\alpha+\alpha^2)ik$	$\frac{1}{3}Lik$

Y yazılı uçlarda 2.° parabolünün teğeti yataydır.

47

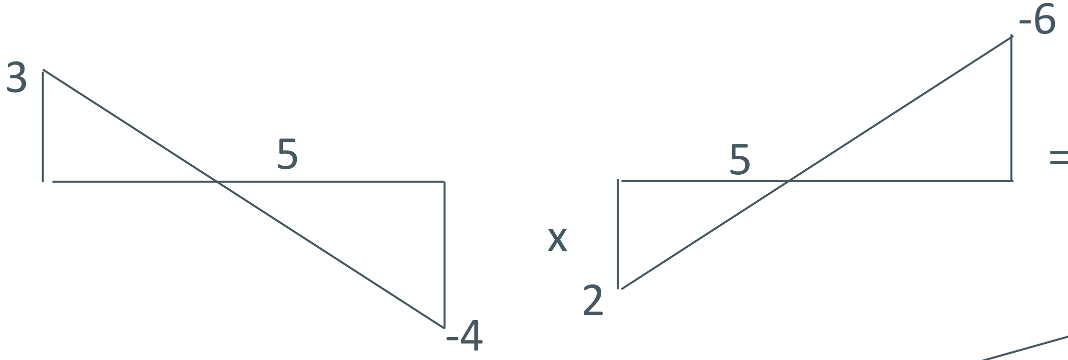
ÇARPIM TABLOLARININ KULLANILMASI *

1) Bütün çarpımlarda i ve k ordinatlarının cebrik değeri göz önüne alınır.

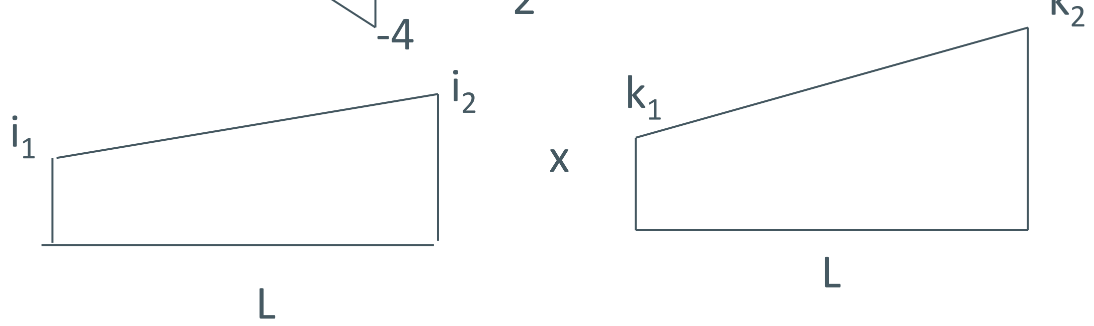


$$= \frac{1}{6} \mathrm{Li}(\mathrm{k}_1 + 2\mathrm{k}_2) = \frac{1}{6} 5(-3)(4 + 2 * 2) = -20$$

$$= \frac{1}{6} \mathrm{Lik} + \frac{1}{3} \mathrm{Lik} = \frac{1}{6} 5(-3) * 4 + \frac{1}{3} 5(-3) * 2 = -20$$



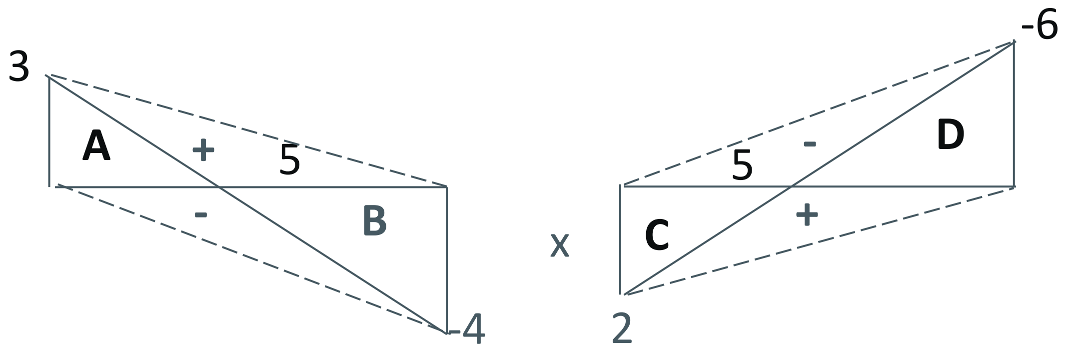
$$= \frac{1}{6} 5[(2 * 3 * 2 + 3 * (-6) + (-4) * 2 + 2(-4) * (-6)] = -\frac{1}{6} 310$$



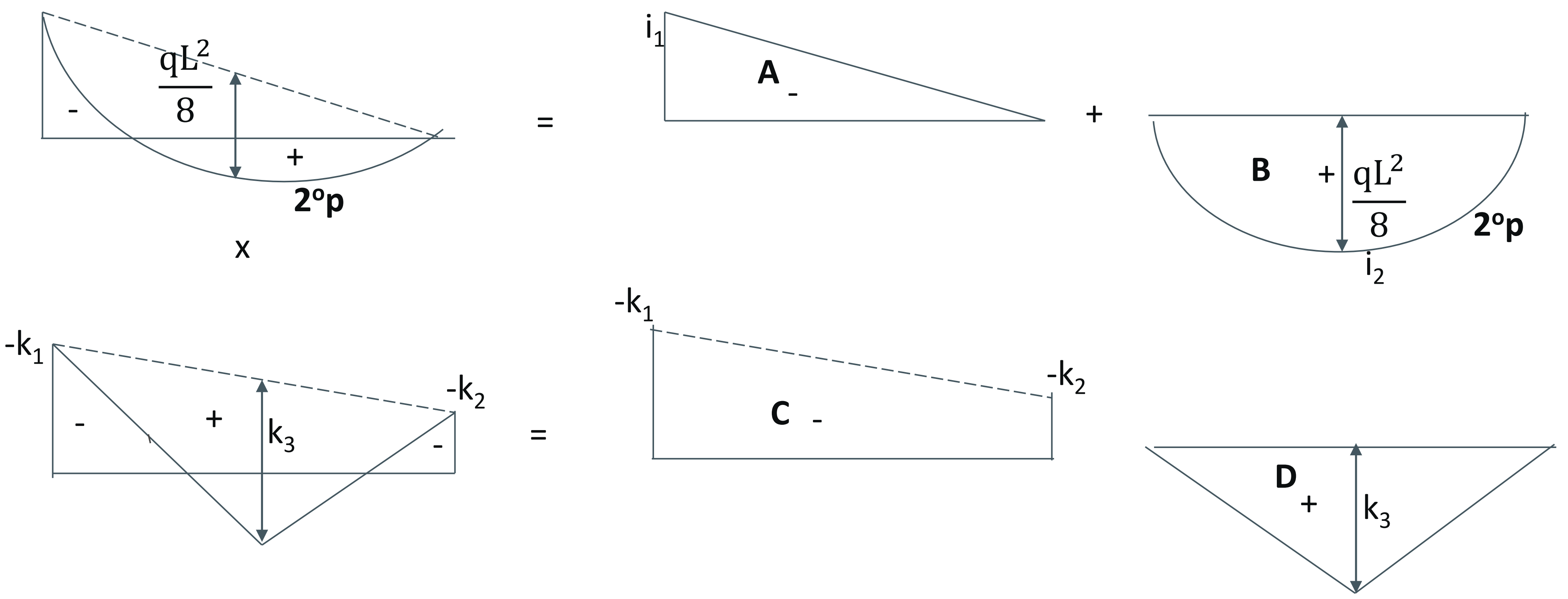
$$= \frac{1}{6} \mathrm{L}(2\mathrm{i}_1\mathrm{k}_1 + \mathrm{i}_1\mathrm{k}_2 + \mathrm{i}_2\mathrm{k}_1 + 2\mathrm{i}_2\mathrm{k}_2)$$

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})(\mathbf{C}+\mathbf{D}) = \quad \mathbf{AC} \quad + \quad \mathbf{AD} \quad + \quad \mathbf{BC} \quad + \quad \mathbf{BD}$$

$$= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}\mathbf{5} * \mathbf{3} * (-\mathbf{6}) + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\mathbf{5} * \mathbf{3} * \mathbf{2} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\mathbf{5} * (-\mathbf{4}) * (-\mathbf{6}) + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}\mathbf{5} * (-\mathbf{4}) * \mathbf{2} = -\frac{\mathbf{310}}{\mathbf{6}}$$



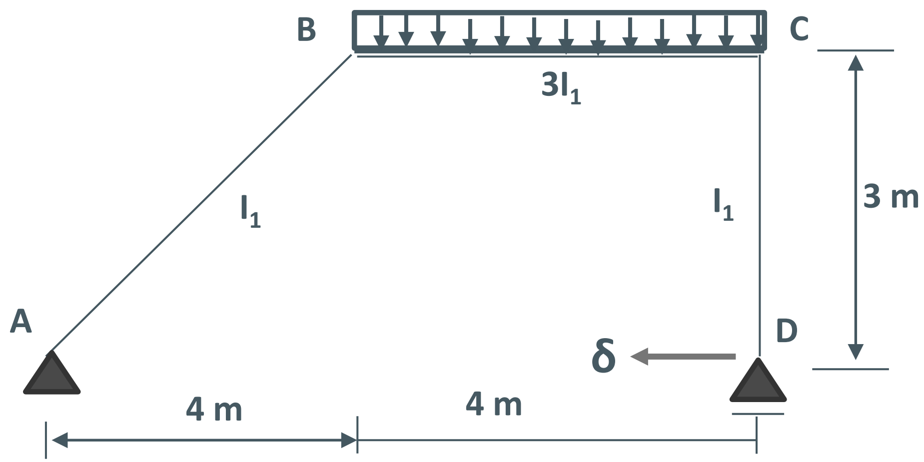
2) Tabloda olmayan M(s) $\overline{\text{M}}$(s) fonksiyonlarının çarpımı süperpozisyon yolu ile yapılır.



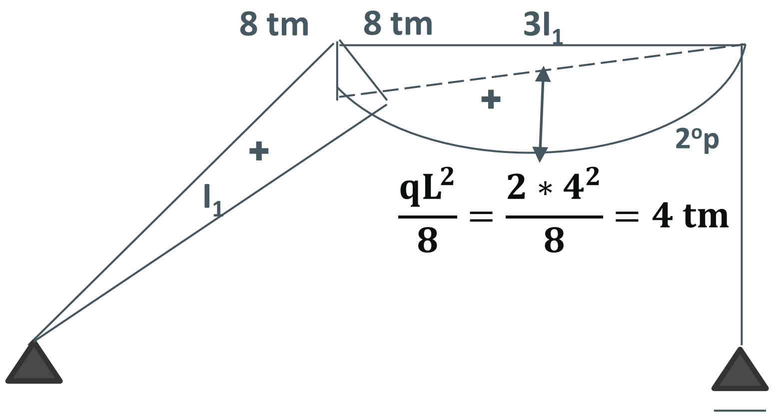
$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})(\mathbf{C}+\mathbf{D}) = \quad \mathbf{AC} \quad + \quad \mathbf{AD} \quad + \quad \mathbf{BC} \quad + \quad \mathbf{BD}$$

UYGULAMA

$\delta = ?$

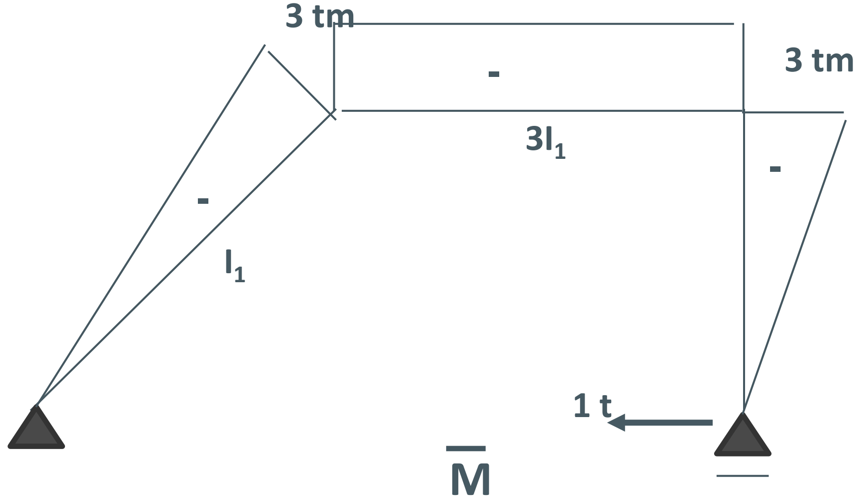


$$1 * \delta_D = \int_0^L \overline{M} \frac{M}{EI} dx$$



$$\frac{qL^2}{8} = \frac{2 * 4^2}{8} = 4 \text{ tm}$$

M



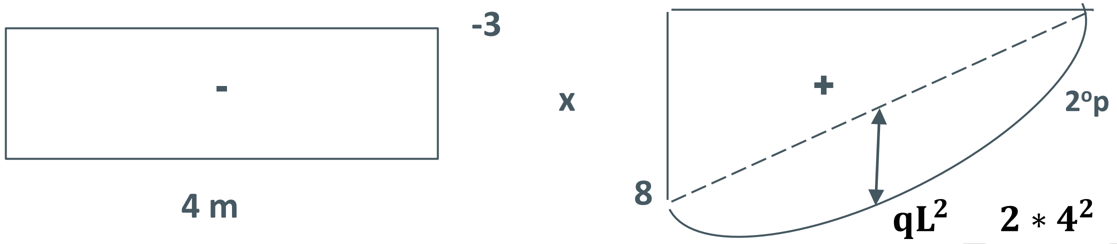
$\overline{M}$

* Hatırlatma: Yapı Statiği 1 İzostatik sistemlerde yer değiştirme hesabı

AB çubuğu üzerinde

$$= \frac{1}{3}\frac{5*8*(-3)}{EI_1} = -\frac{40}{EI_1}$$

BC çubuğu üzerinde



$$=$$

$$\frac{\mathbf{qL^2}}{\mathbf{8}} = \frac{\mathbf{2*4^2}}{\mathbf{8}} = \mathbf{4\ tm}$$

ÇARPIM TABLOSU				
	k (L) k	(L) k	k_1 (L) k_2	2.° (L) k_m
i (L) i	Lik	$\frac{1}{2}$Lik	$\frac{1}{2}$L$i(k_1+k_2)$	$\frac{2}{3}$Lik_m
(L) i	$\frac{1}{2}$Lik	$\frac{1}{3}$Lik	$\frac{1}{6}$L$i(k_1+2k_2)$	$\frac{1}{3}$Lik_m
i (L)	$\frac{1}{2}$Lik	$\frac{1}{6}$Lik	$\frac{1}{6}$L$i(2k_1+k_2)$	$\frac{1}{3}$Lik_m
i_1 (L) i_2	$\frac{1}{2}$L$(i_1+i_2)k$	$\frac{1}{6}$L$(i_1+2i_2)k$	$\frac{1}{6}$L$(2i_1k_1+i_1k_2+i_2k_1+2i_2k_2)$	$\frac{1}{3}$L$(i_1+i_2)k_m$
2° (L) i_m	$\frac{2}{3}$Li_mk	$\frac{1}{3}$Li_mk	$\frac{1}{3}$L$i_m(k_1+k_2)$	$\frac{8}{15}$Li_mk_m

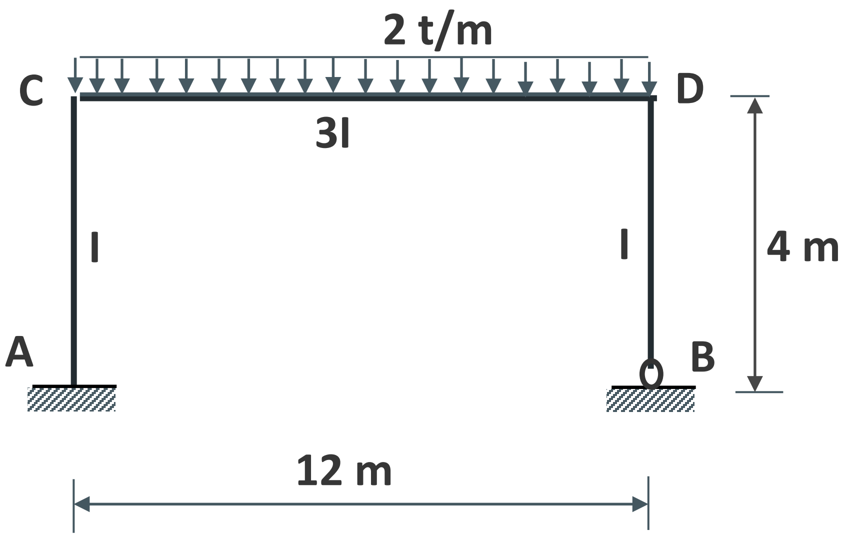
$$\frac{1}{2}*\frac{\mathrm{Lik}}{\mathrm{EI}}+\frac{2}{3}*\frac{\mathrm{Lik}}{\mathrm{EI}}=\frac{1}{2}*\frac{4*8*(-3)}{\mathrm{E3I_1}}+\frac{2}{3}*\frac{4*4*(-3)}{\mathrm{E3I_1}}=-26{,}7\frac{1}{\mathrm{EI_1}}$$

CD çubuğu üzerinde   0

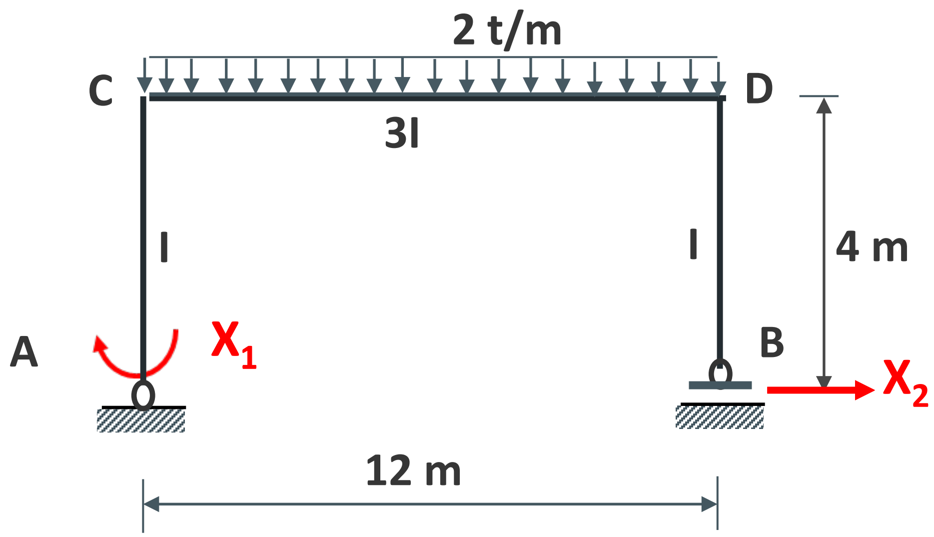
$$\delta = -\frac{40}{\mathrm{EI_1}}-\frac{26{,}7}{\mathrm{EI_1}}=-\frac{66{,}7}{\mathrm{EI_1}}$$

ÇÖZÜMLÜ ÖRNEKLER

- ÖRNEK 1



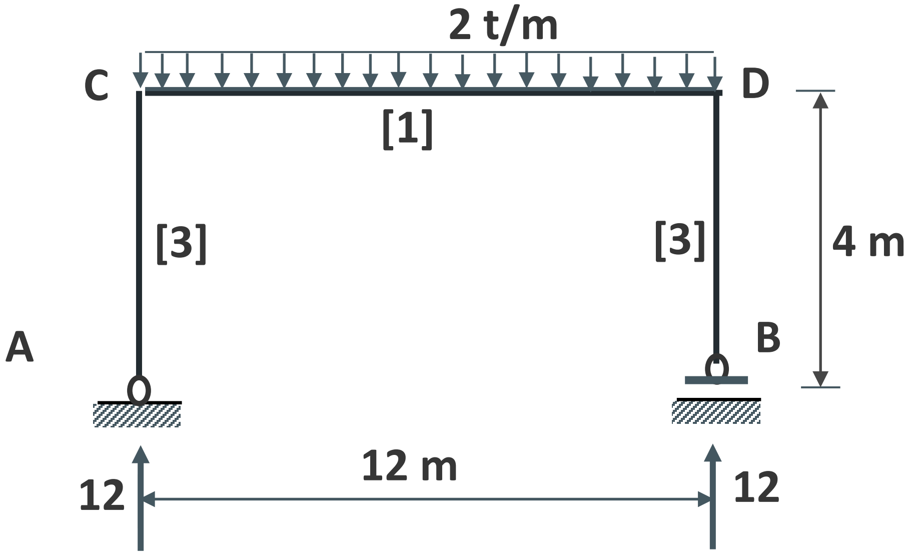
Şekilde verilen çerçevenin dış yükler altında M N T diyagramlarını çiziniz.

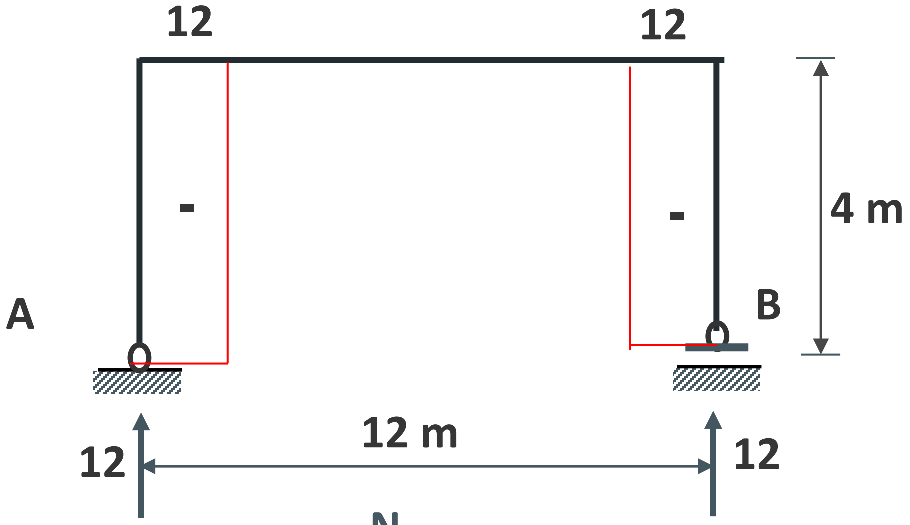


İzostatik esas sistem. 2. dereceden hiperstatik sistem.

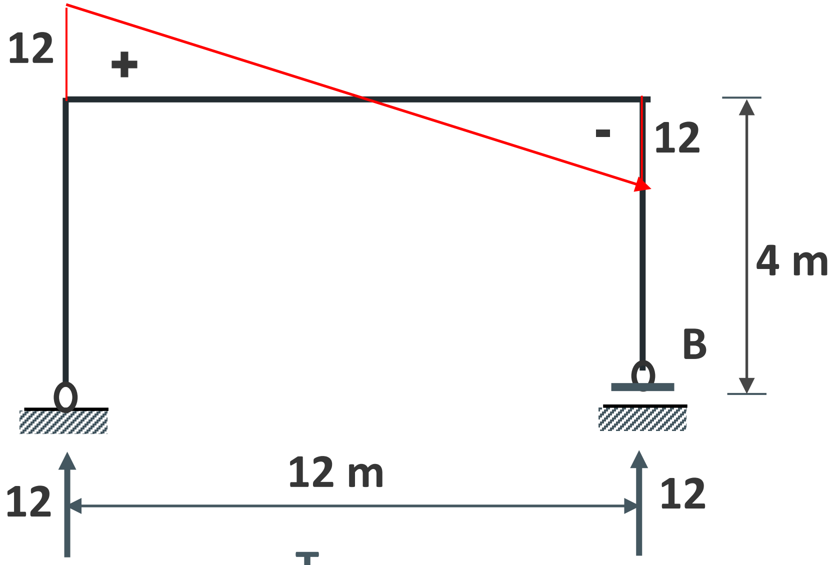
$$I_c = 3I \rightarrow \frac{I_c}{I} = \frac{3I}{I} = 3$$

Sadece dış yükler

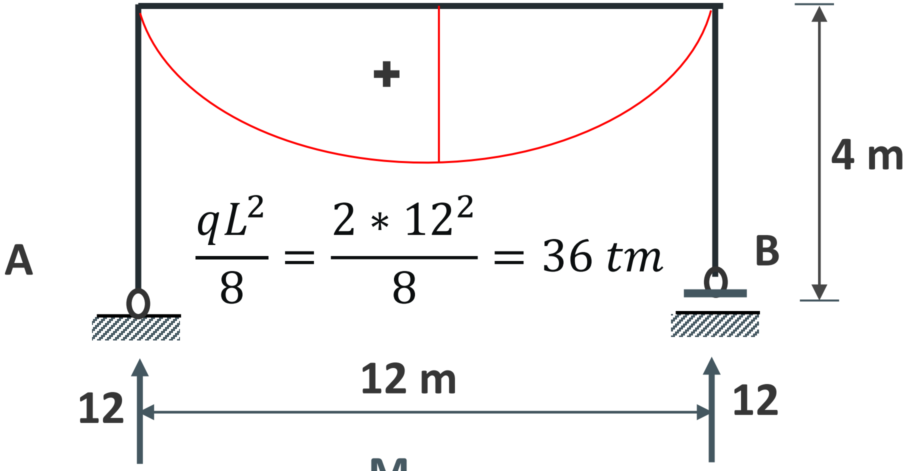




N_0



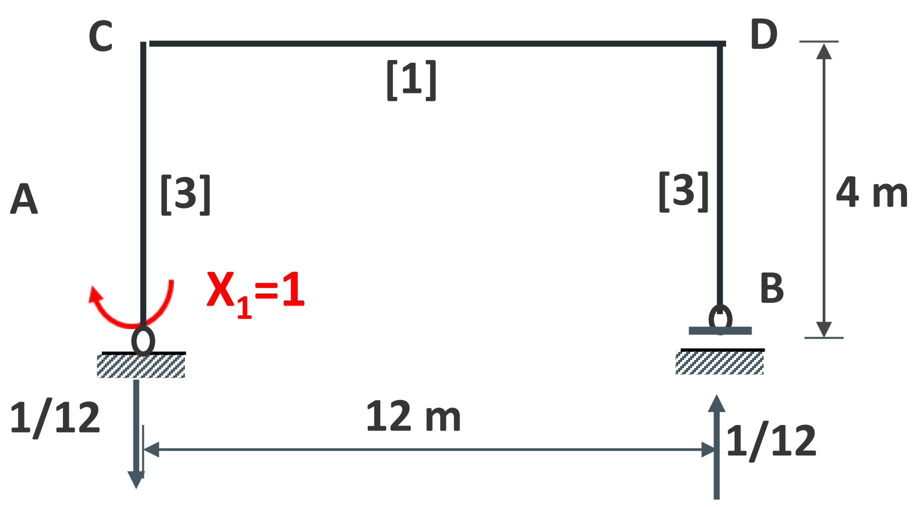
T_0

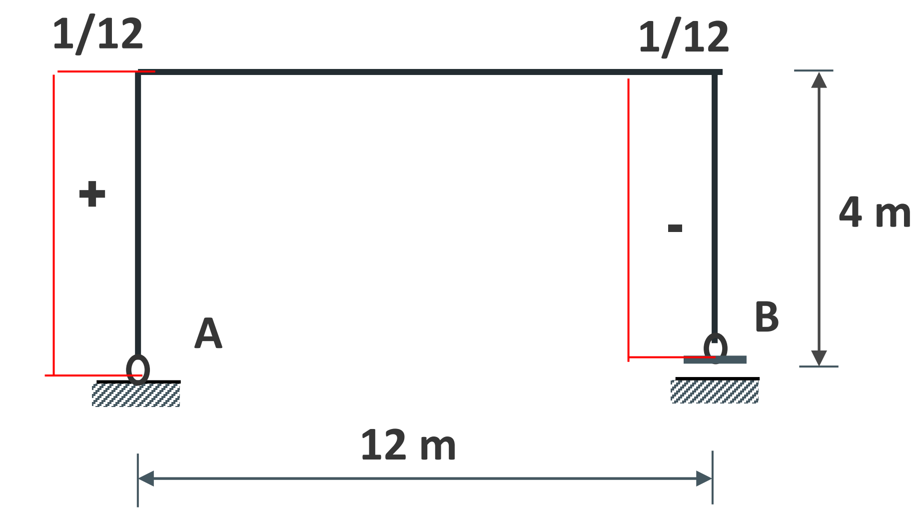


$$\frac{qL^2}{8} = \frac{2 * 12^2}{8} = 36\ tm$$

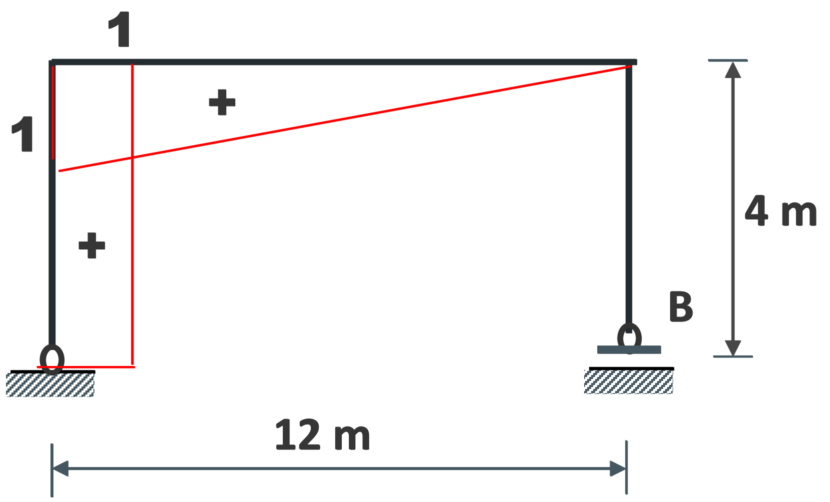
M_0

X$_1$=1 birim yüklemesi

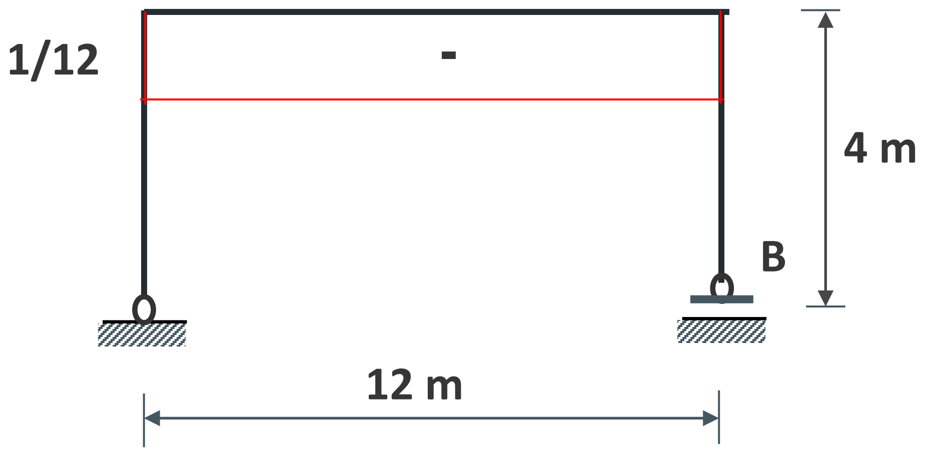




N$_1$

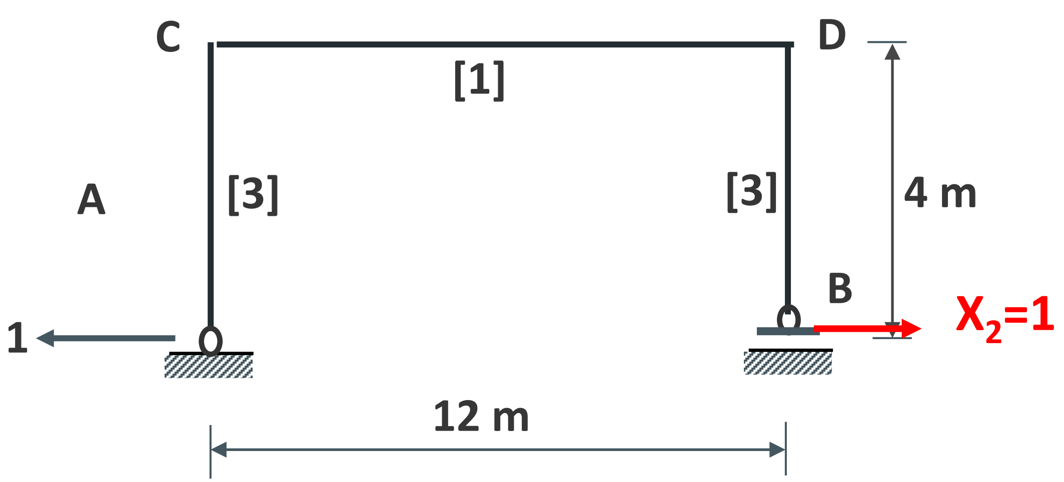


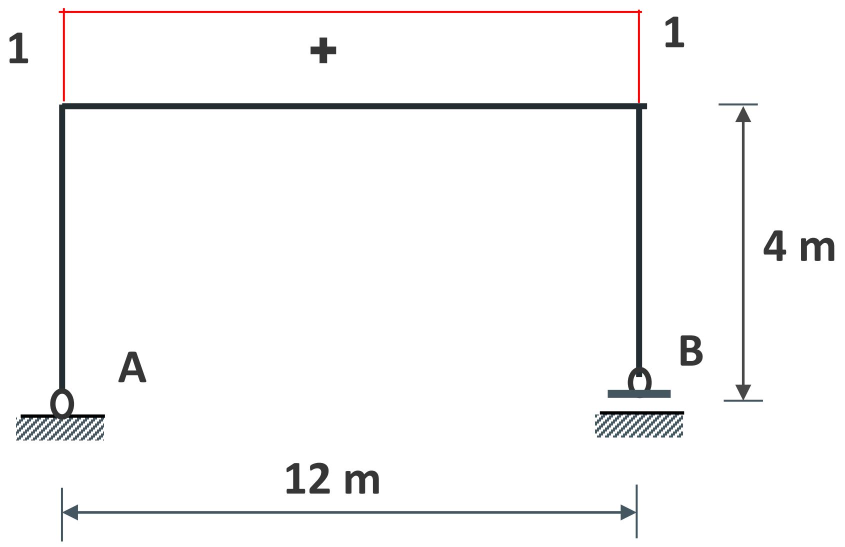
M$_1$



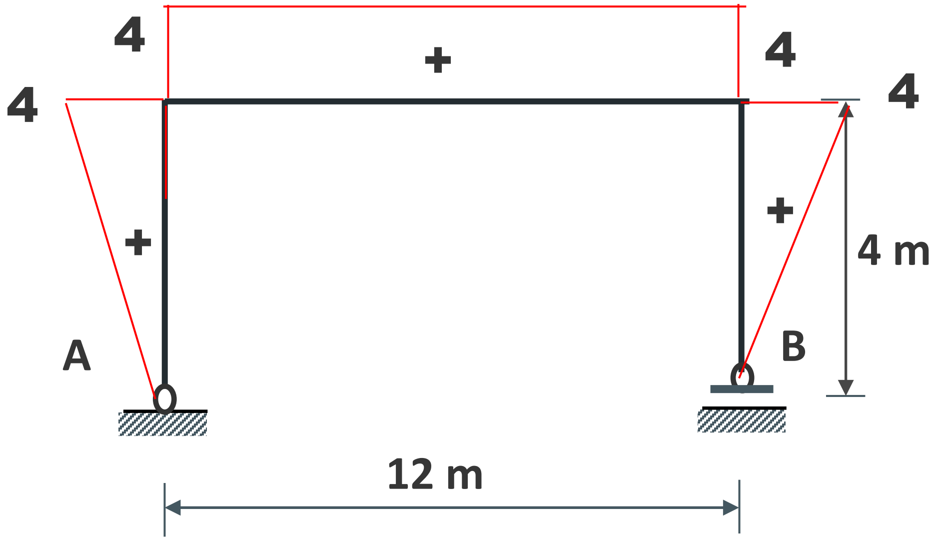
T$_1$

X_2=1 birim yüklemesi

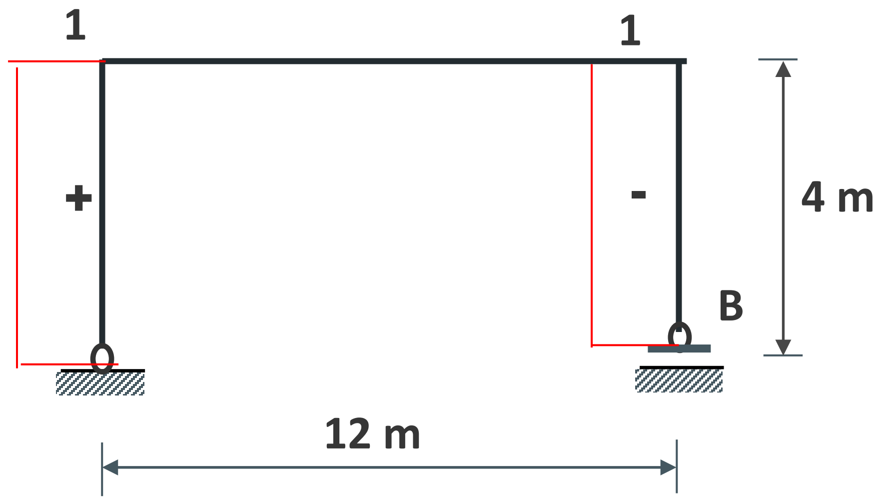




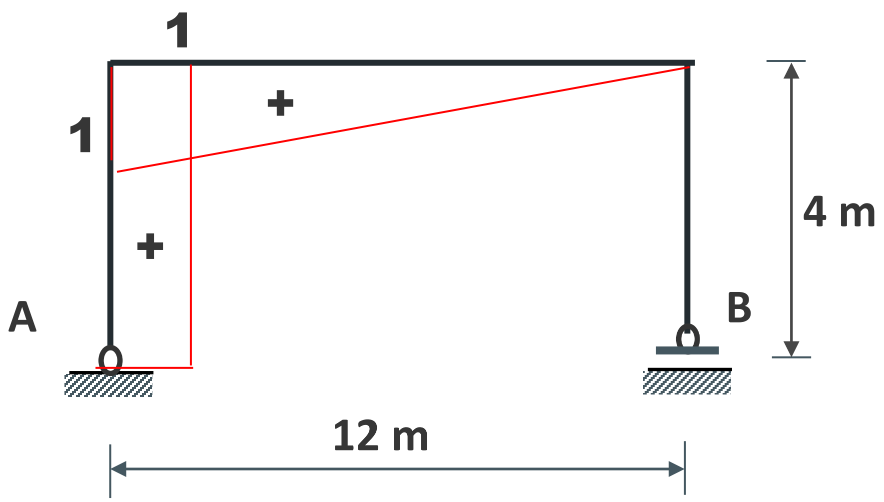
N_2



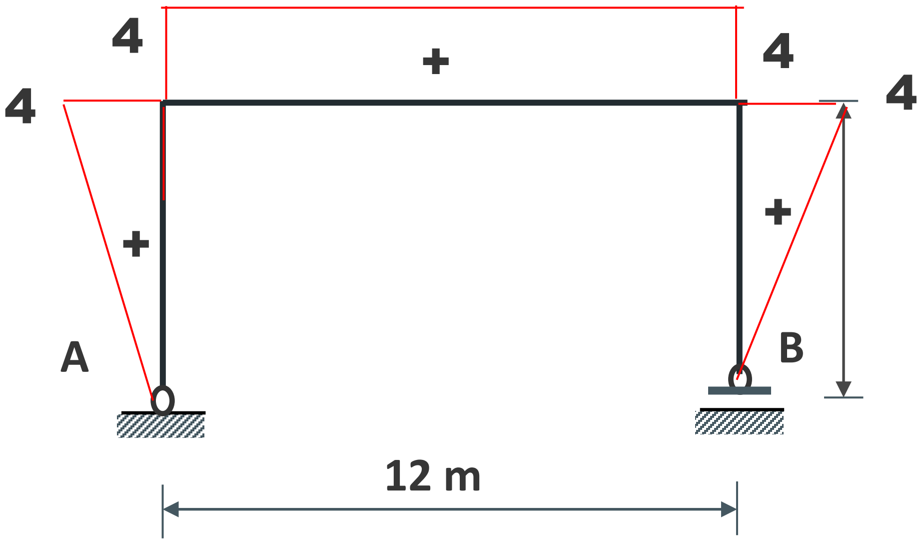
M_2



T_2



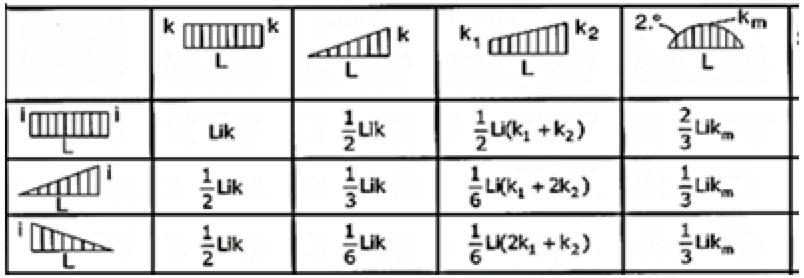
M_1



M_2

$$\delta_{ij} = \int M_i M_j \frac{ds}{EI} \qquad EI_c\delta_{ij} = \int M_i M_j \frac{I_c}{I} ds$$

36

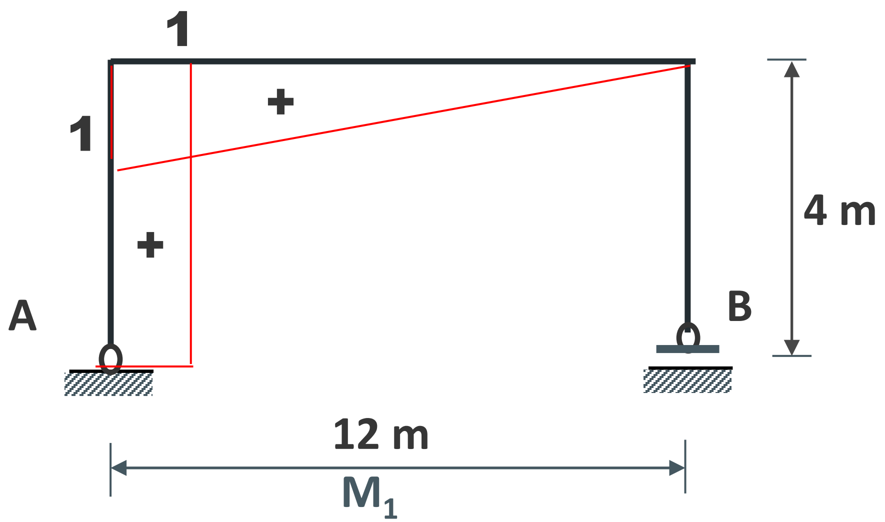


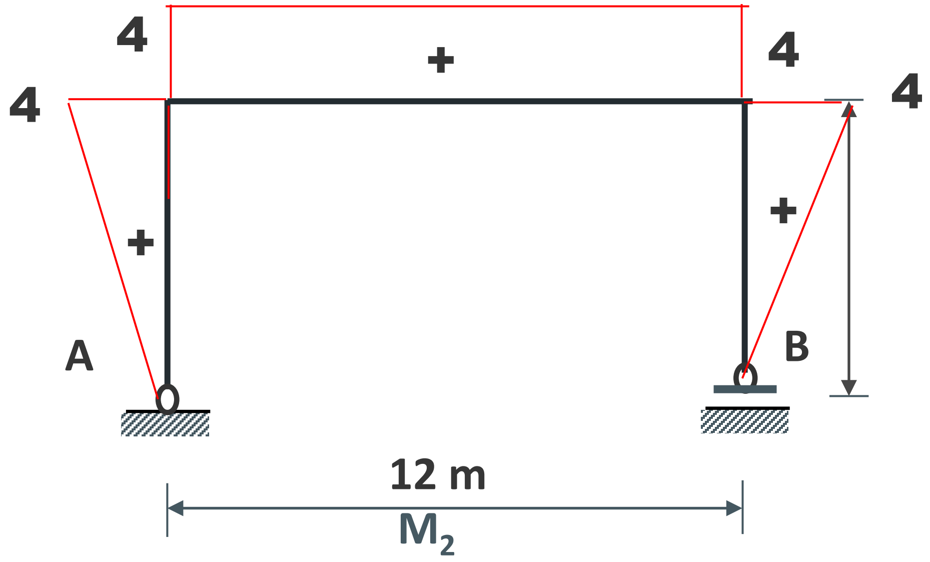
	k k L	k L	k_1 k_2 L	2° k_m L
i i L	Lik	$\frac{1}{2}$Lik	$\frac{1}{2}$Li(k_1 + k_2)	$\frac{2}{3}$Lik$_m$
i L	$\frac{1}{2}$Lik	$\frac{1}{3}$Lik	$\frac{1}{6}$Li(k_1 + 2k_2)	$\frac{1}{3}$Lik$_m$
i L	$\frac{1}{2}$Lik	$\frac{1}{6}$Lik	$\frac{1}{6}$Li(2k_1 + k_2)	$\frac{1}{3}$Lik$_m$

$$EI_c\delta_{11} = 4 * 1 * 1 * [3] + \frac{1}{3} * 12 * 1 * 1 * [1] = 12 + 4 = 16$$

$$EI_c\delta_{12} = EI_c\delta_{21} = \frac{1}{2} * 4 * 4 * 1 * [3] + \frac{1}{2} * 12 * 1 * 4 * [1] = 24 + 24 = 48$$

$$EI_c\delta_{22} = 2\left(\frac{1}{3} * 4 * 4 * 4 * [3]\right) + 12 * 4 * 4 * [1] = 320$$

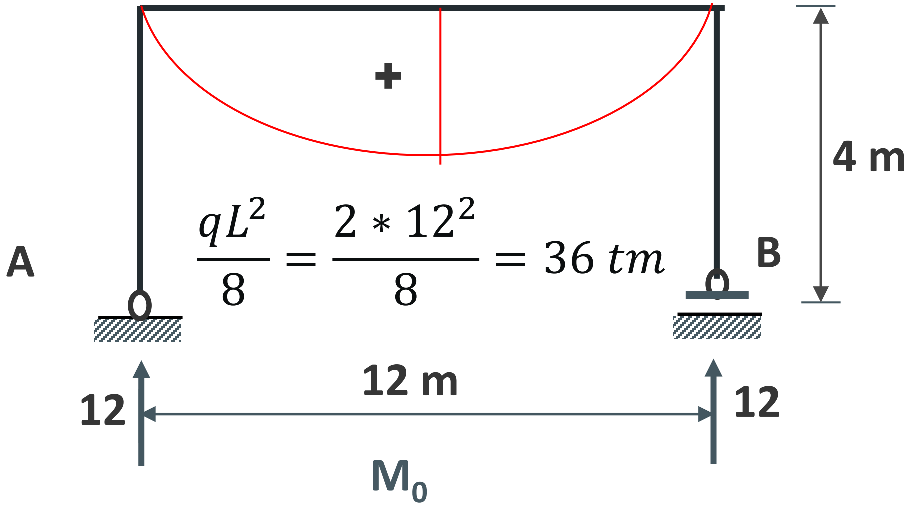




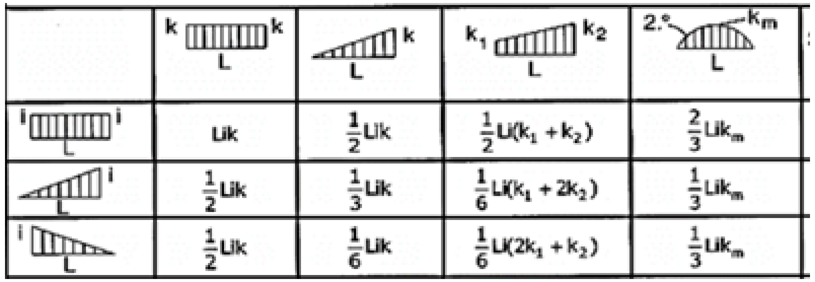
$$\delta_{i0} = \int M_i M_0 \frac{ds}{EI} \qquad EI_c\delta_{i0} = \int M_i M_0 \frac{I_c}{I} ds$$

$$EI_c\delta_{10} = \int M_1 M_0 \frac{I_c}{I} ds = \frac{1}{3} 12 \ * 36 \ * 1 \ * [1] = 144$$

$$EI_c\delta_{20} = \int M_2 M_0 \frac{I_c}{I} ds = \frac{2}{3} 12 \ * 36 \ * 4 \ * [1] = 1152$$

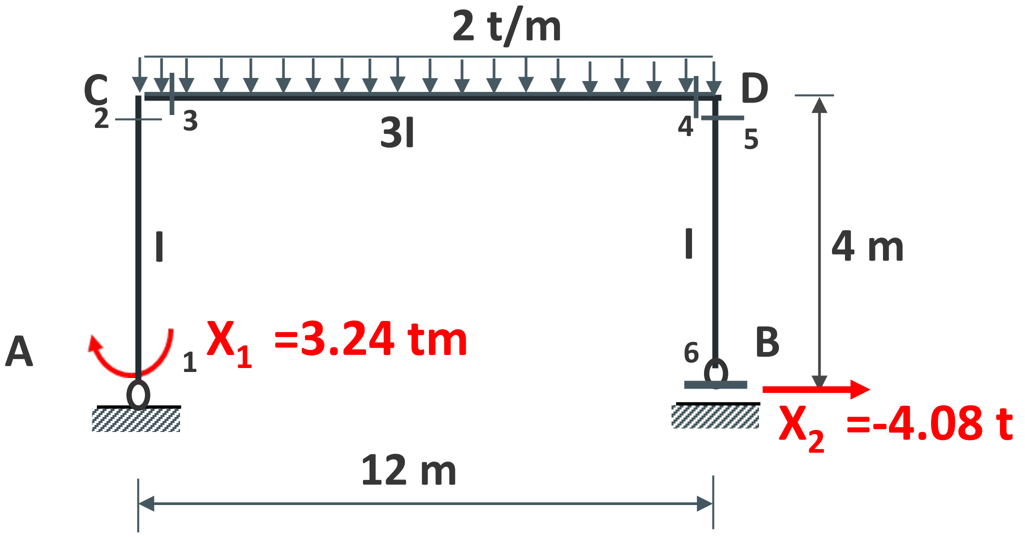


$$\frac{qL^2}{8} = \frac{2 * 12^2}{8} = 36\ tm$$



	k k L	k L	k_1 k_2 L	2.° k_m L
i i L	Lik	$\frac{1}{2}$Lik	$\frac{1}{2}$L$i(k_1+k_2)$	$\frac{2}{3}$Lik_m
i L	$\frac{1}{2}$Lik	$\frac{1}{3}$Lik	$\frac{1}{6}$L$i(k_1+2k_2)$	$\frac{1}{3}$Lik_m
i L	$\frac{1}{2}$Lik	$\frac{1}{6}$Lik	$\frac{1}{6}$L$i(2k_1+k_2)$	$\frac{1}{3}$Lik_m

$$EI_c \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} + EI_c \begin{Bmatrix} \delta_{10} \\ \delta_{20} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



$$EI_c\delta_{11}X_1 + EI_c\delta_{12}X_2 + EI_c\delta_{10} = 0$$

$$EI_c\delta_{21}X_2 + EI_c\delta_{22}X_2 + EI_c\delta_{20} = 0$$

$$16X_1 + 48X_2 + 144 = 0$$

$$48X_1 + 320X_2 + 1152 = 0$$

$$X_1 = 3.24\ tm \qquad X_2 = -4.08\ t$$

$$M = M_0 + M_1X_1 + M_2X_2$$

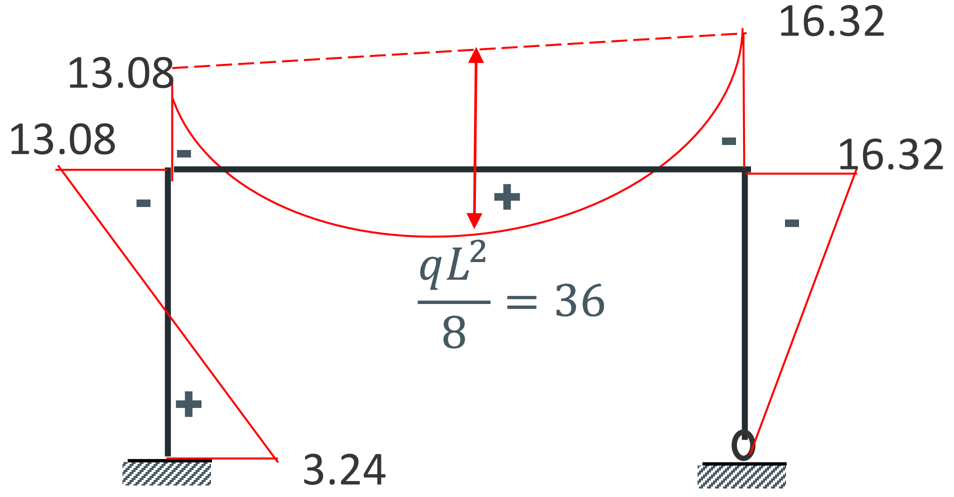
$$M_{(1)} = 0 + 1 * 3.24 + 0 = 3.24\ tm$$

$$M_{(3)} = 0 + 1 * 3.24 + 4 * (-4.08) = -13.08\ tm$$

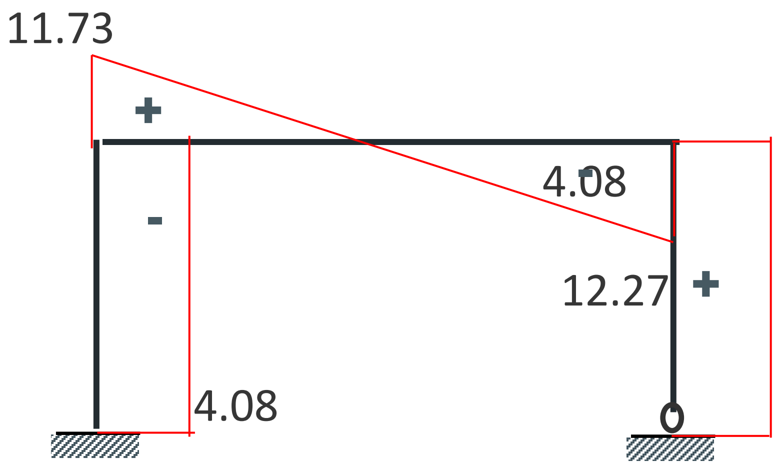
$$M_{(2)} = 0 + 1 * 3.24 + 4 * (-4.08) = -13.08\ tm$$

$$M_{(4)} = 0 + 0 * 3.24 + 4 * (-4.08) = -16.32\ tm$$

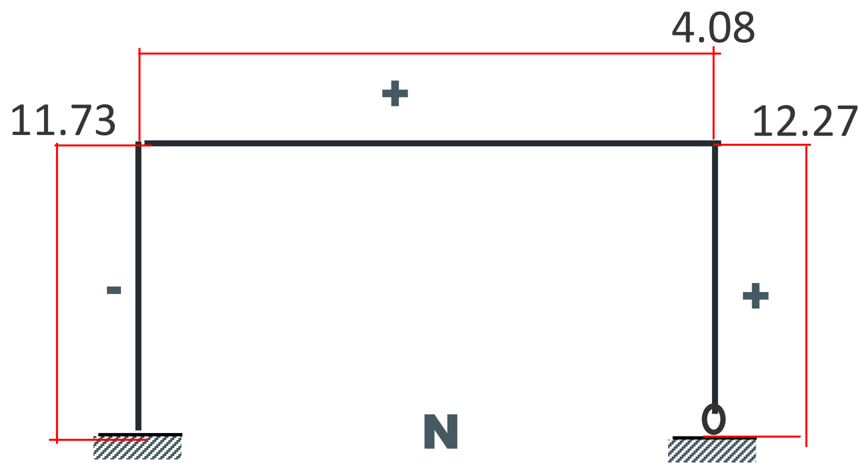
$$M_{(5)} = -16.32\ tm \qquad M_{(6)} = 0$$



M



T

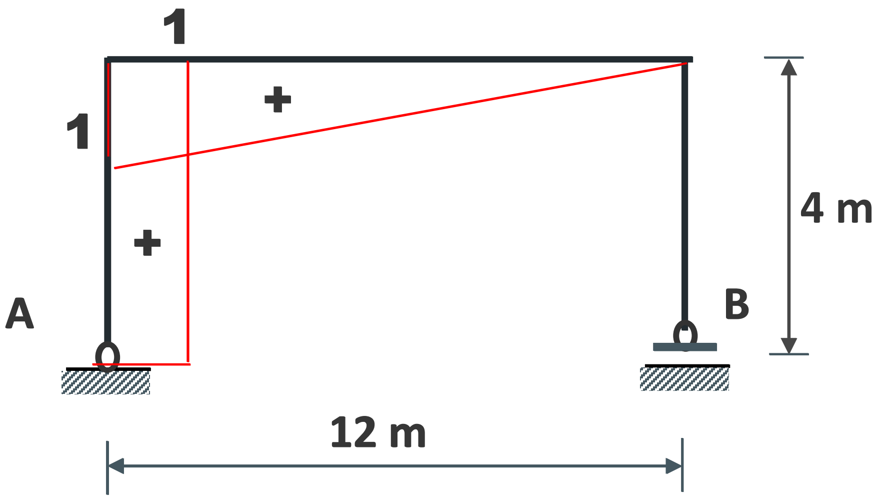


N

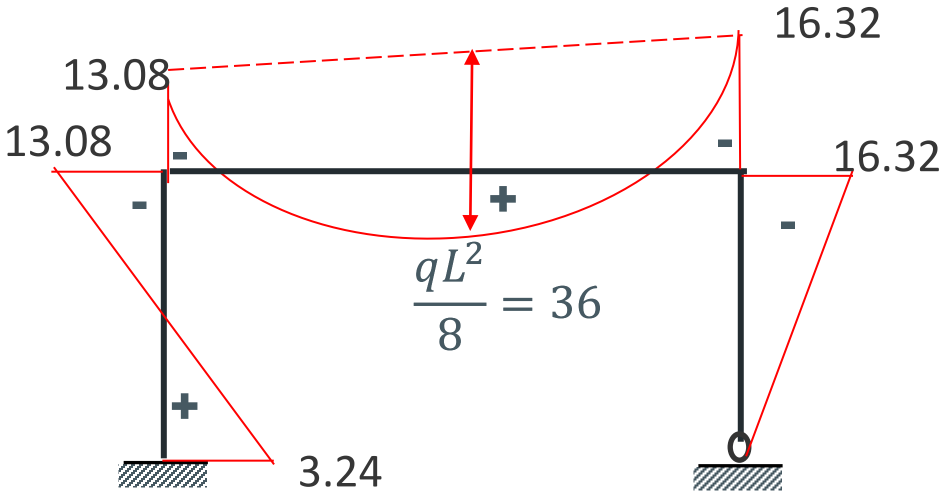
$$\int M_1 M \frac{ds}{EI} = 0 \,\surd$$

$$\int M_2 M \frac{ds}{EI} = 0 \,\surd$$

$$\int M_1 M \frac{ds}{EI} = 0 \;\; 1\, nolu\ kapalı\ süreklilik\ denklemi$$



M_1



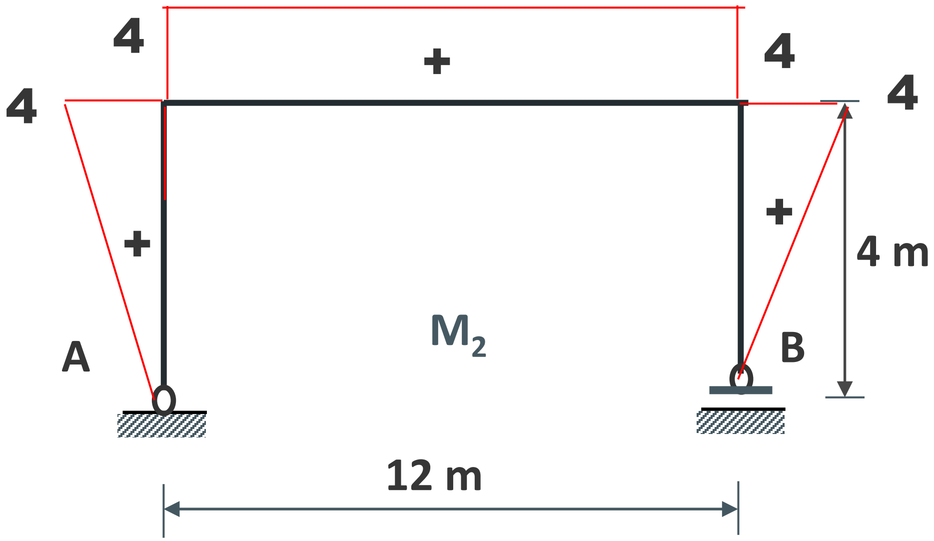
M

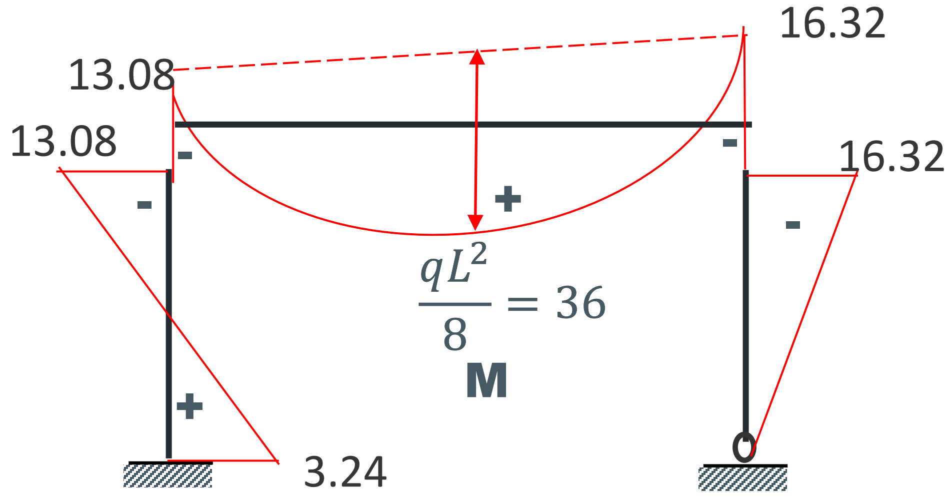
$$\int M_1 M \frac{I_c}{I} ds = \frac{1}{2} 4 * 1 * (3.24 - 13.08) * [3] + \frac{1}{3} 12 * 1 * 36 * [1] + \frac{1}{6} 12 * 1 * [2 * (-13.08) - 16.32][1] = 0 \surd$$

	k k L	k L	k_1 k_2 L	2° k_m L
i i L	Lik	$\frac{1}{2}$Lik	$\frac{1}{2}$Li(k_1+k_2)	$\frac{2}{3}$Lik_m
i L	$\frac{1}{2}$Lik	$\frac{1}{3}$Lik	$\frac{1}{6}$Li(k_1+2k_2)	$\frac{1}{3}$Lik_m
i L	$\frac{1}{2}$Lik	$\frac{1}{6}$Lik	$\frac{1}{6}$Li$(2k_1+k_2)$	$\frac{1}{3}$Lik_m

$$\int M_2 M \frac{ds}{EI} = 0 \;\; 2\, nolu\ kapalı\ süreklilik\ denklemi$$

	k k L	k L	k_1 k_2 L	2° k_m L
i i L	Lik	$\frac{1}{2}$Lik	$\frac{1}{2}$Li(k_1+k_2)	$\frac{2}{3}$Lik$_m$
i L	$\frac{1}{2}$Lik	$\frac{1}{3}$Lik	$\frac{1}{6}$Li(k_1+2k_2)	$\frac{1}{3}$Lik$_m$
i L	$\frac{1}{2}$Lik	$\frac{1}{6}$Lik	$\frac{1}{6}$Li($2k_1+k_2$)	$\frac{1}{3}$Lik$_m$



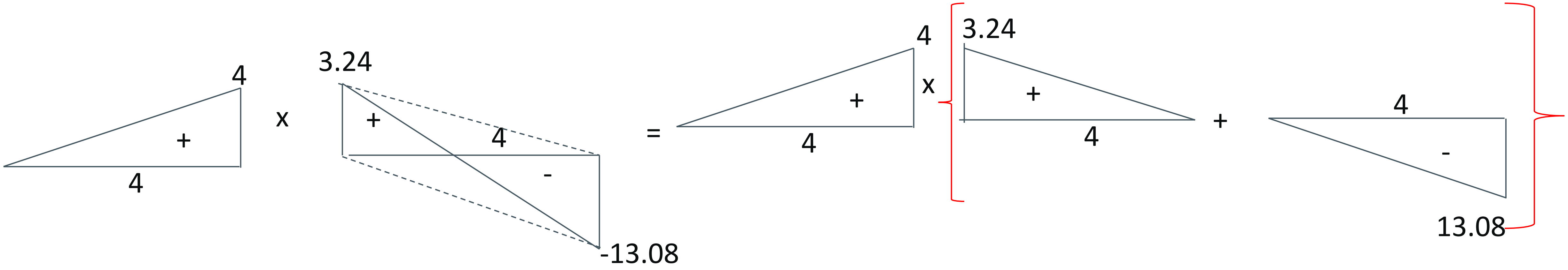


$$\int M_2 M \frac{I_c}{I} ds = \frac{1}{6} 4 * 4 * (2 * 3.24 - 13.08) * [3] + \frac{2}{3} 12 * 4 * 36 * [1] + \frac{1}{2} 12 * 4 * [(-13.08) - 16.32][1] +$$

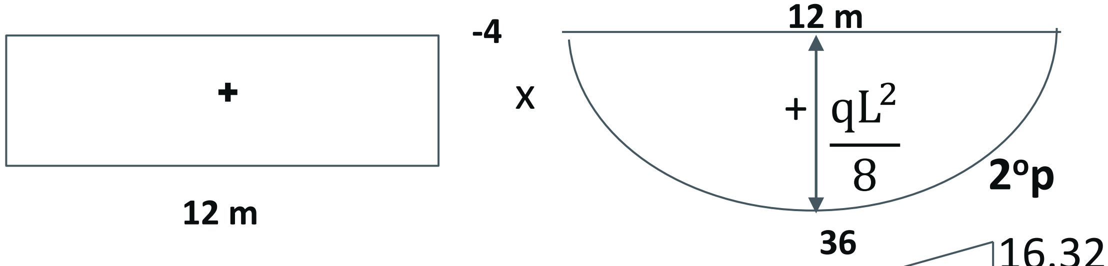
$$\frac{1}{3} 4 * 4 * (-16.32) * [3] = 1.92$$

$$relatif hata = \frac{1.92}{\frac{1}{2}(1152 + 1150.08)} * 100 = \%0.1666 < \%1 \surd$$

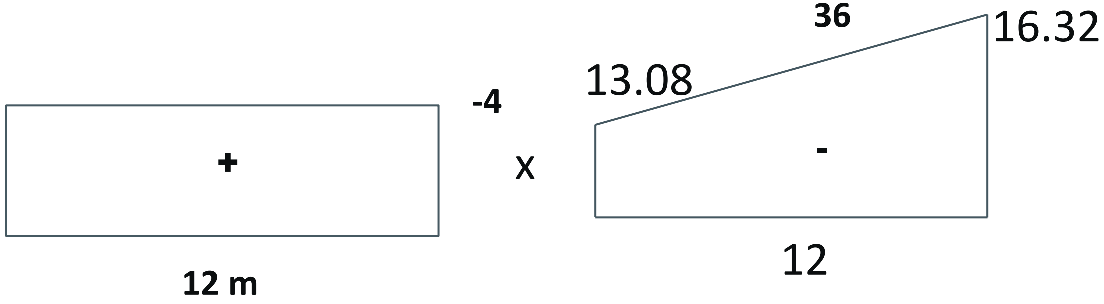
$$(+) terimler\ toplamı = 1152 \;\; (-) terimler\ toplamı = 1150.08$$



$$\frac{1}{6}Lik + \frac{1}{3}Lik = \frac{1}{6}4 * 4 * 3.24 * [3] + \frac{1}{3}4 * 4 * (-13.08) * [3] = -183.36$$

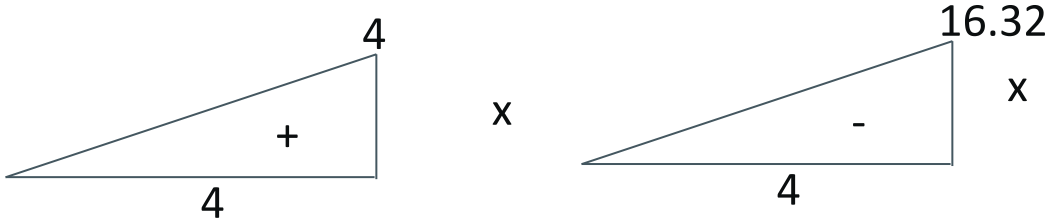


$$\frac{2}{3}Lik_m = \frac{2}{3}12 * 4 * 36 * [1] = 1152$$



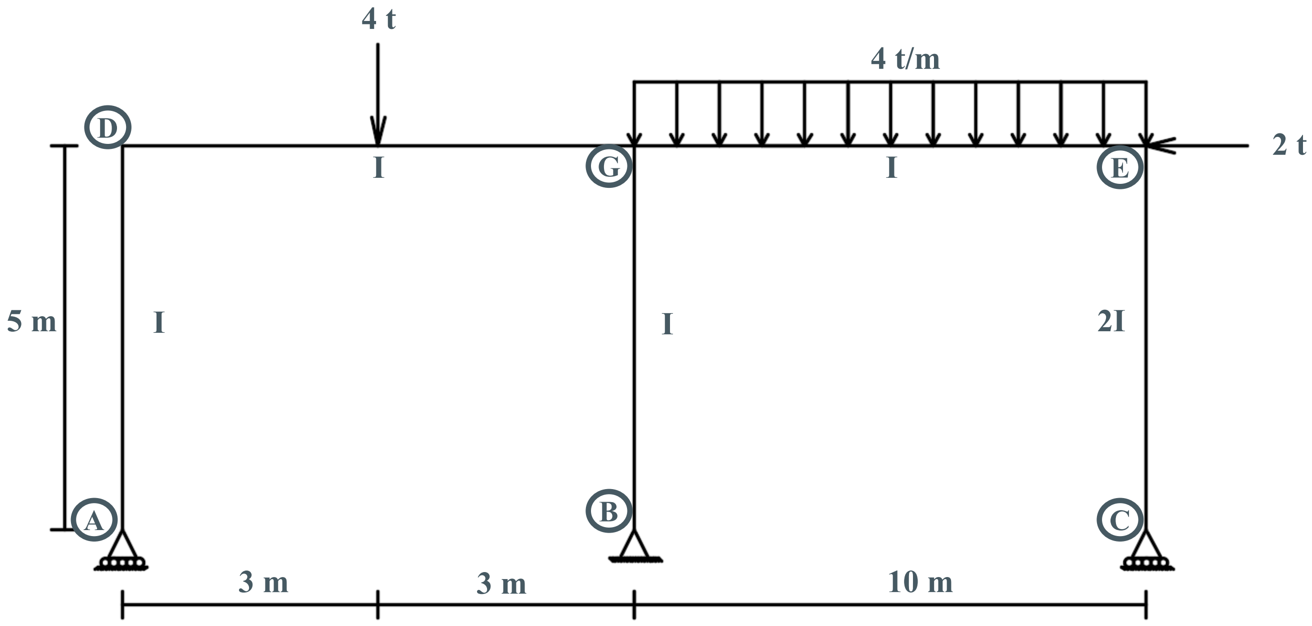
$$\frac{1}{2}Li(k_1 + k_2) = \frac{1}{2}12 * 4 * (-13.08 - 16.32) * [1] = -705.6$$

$$\frac{1}{3}Lik = \frac{1}{3}4 * 4 * (-16.32) * [3] = -261.12$$



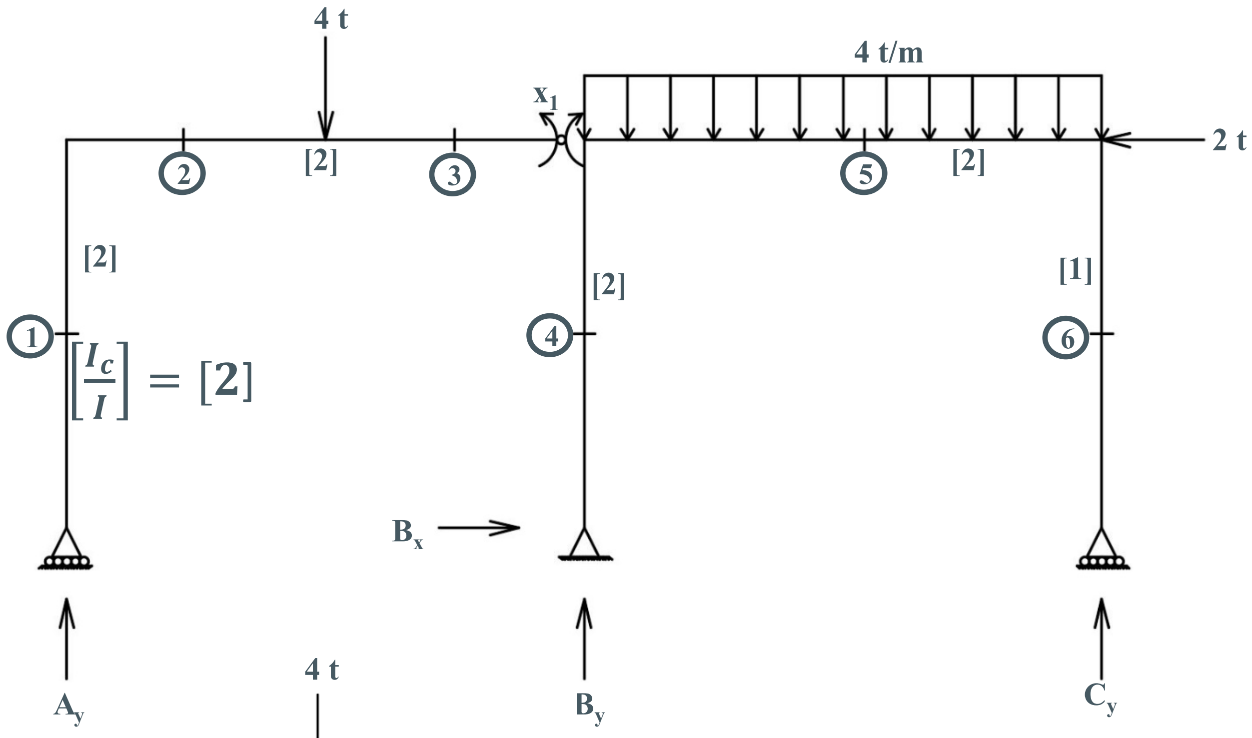
$$\int M_2 M \frac{I_c}{I} ds = -183.36 + 1152 - 705.6 - 261.12 = 1.92 \cong 0$$

ÖRNEK 2

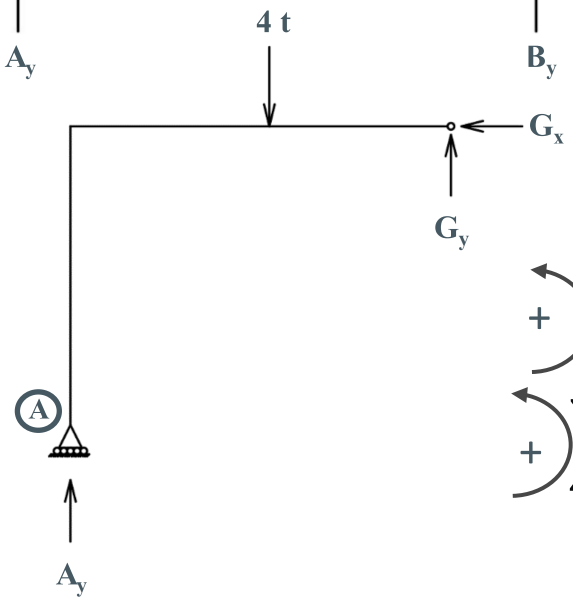


Şekilde verilen sistemin M N T diyagramlarını çiziniz.

$$I_c = 2I \quad \rightarrow \left[\frac{I_c}{I}\right]$$



1. **dereceden hiperstatik sistem**
2. **İzostatik Esas Sistem**

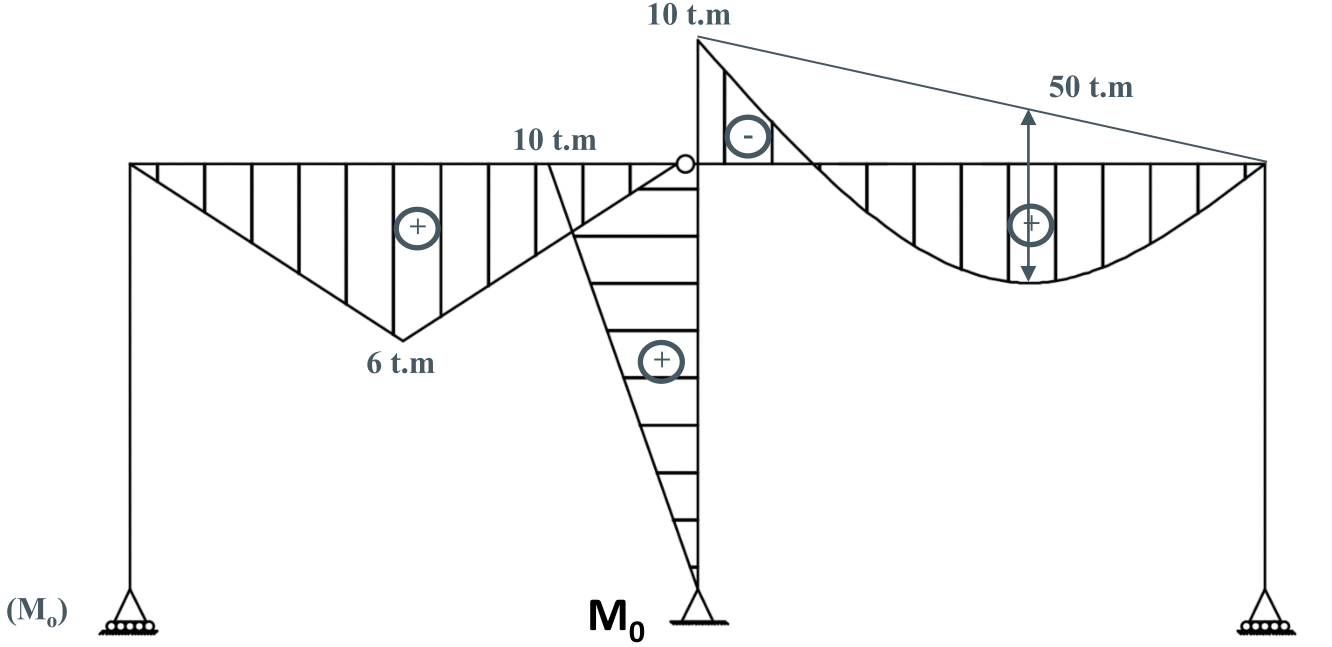


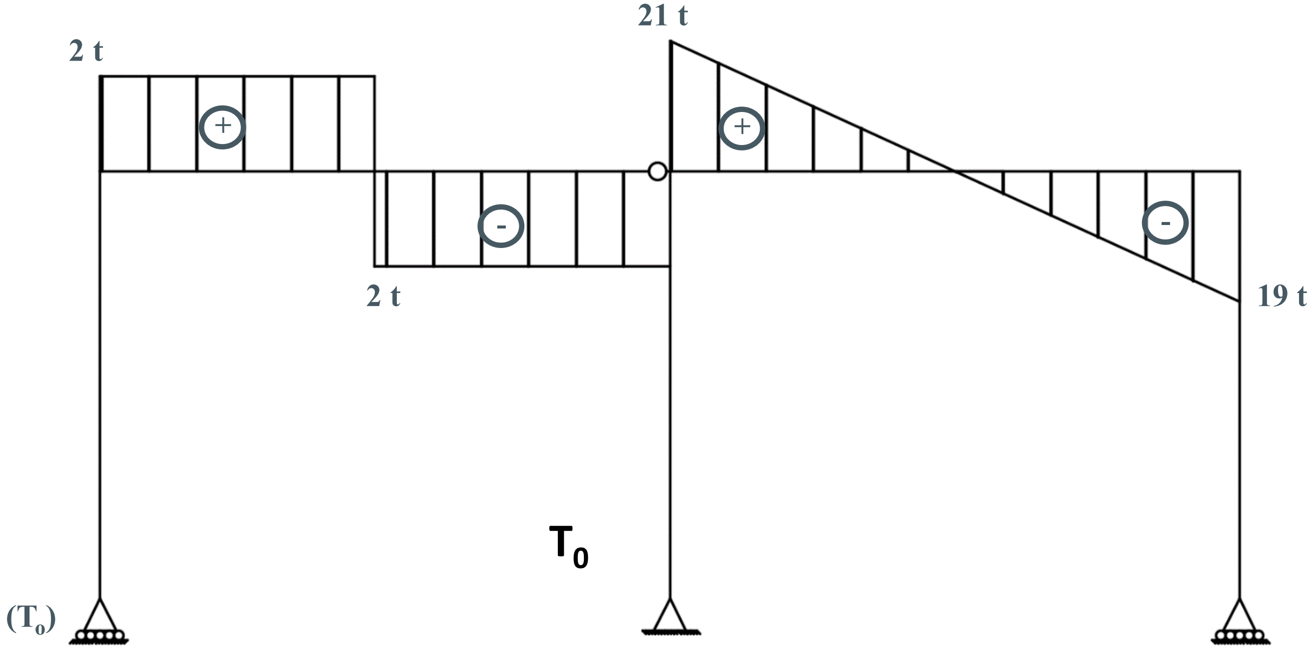
$$\rightarrow^{+} \sum F_x = 0 \;\; \rightarrow B_x = 2\ t \qquad \uparrow^{+} \sum F_y = 0 \;\; \rightarrow A_y + B_y + C_y = 4 + 4 * 10 = 44\ t$$

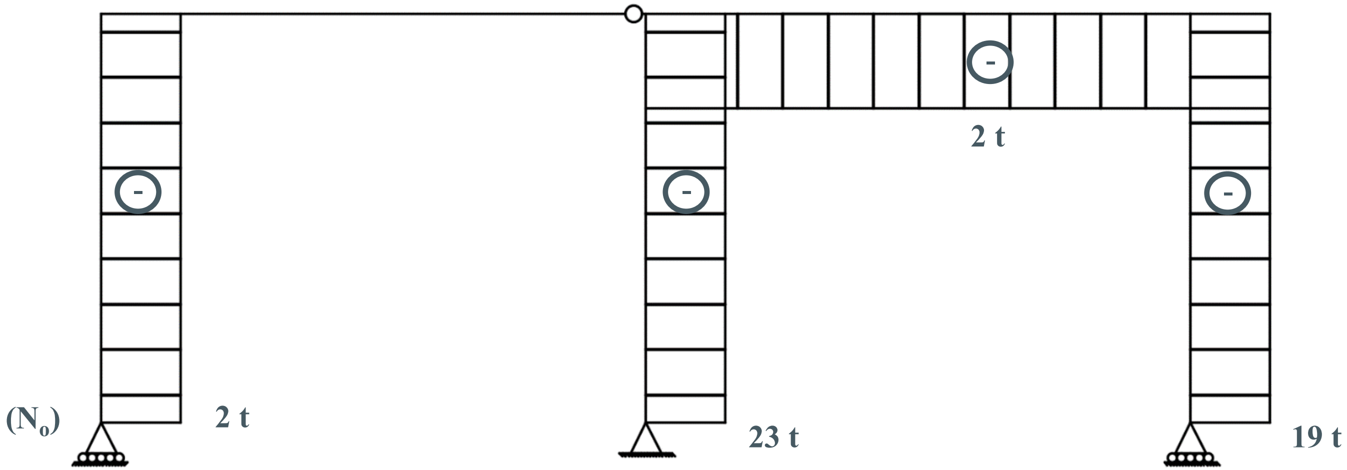
$$+ \sum M_{G_{sol}} = 0 \;\; \rightarrow 4 * 3 - A_y * 6 = 0 \;\; \rightarrow A_y = 2\ t$$

$$+ \sum M_{G_{ssğ}} = 0 \;\; \rightarrow C_y * 10 + B_x * 5 - 4 * 10 * 5 = 0 \;\; \rightarrow C_y = 19\ t$$

$$B_y = 44 - A_y - C_y = 44 - 2 - 19 = 23\ t$$

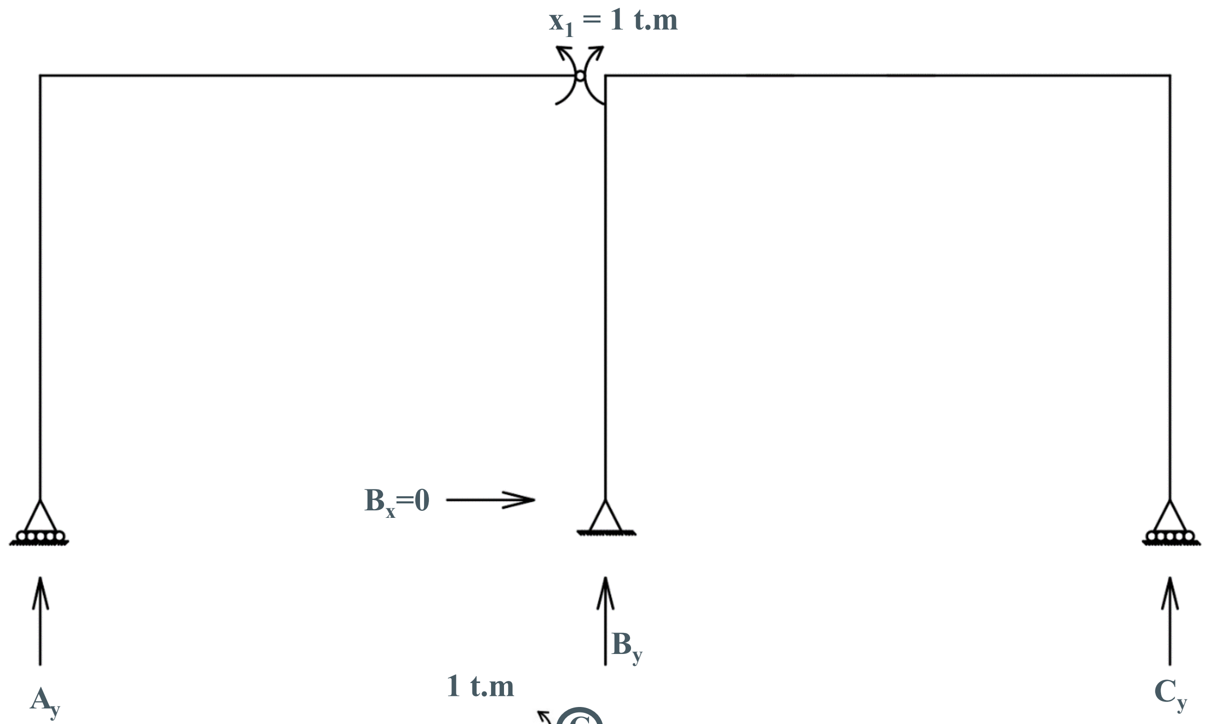

10 t.m
50 t.m
10 t.m
+
-
+
6 t.m
+
(Mo)
M_0

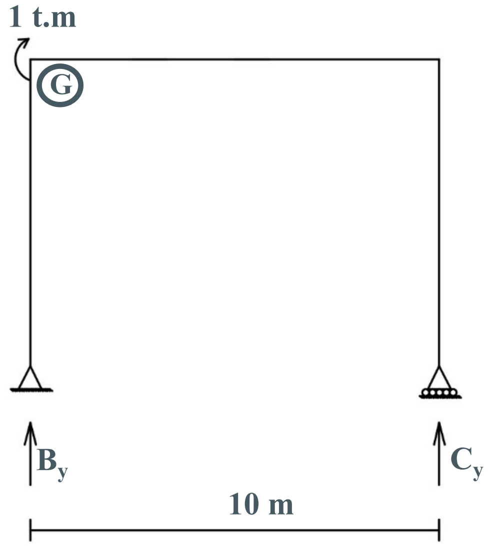

21 t
2 t
+
+
-
-
2 t
19 t
T_0
(To)

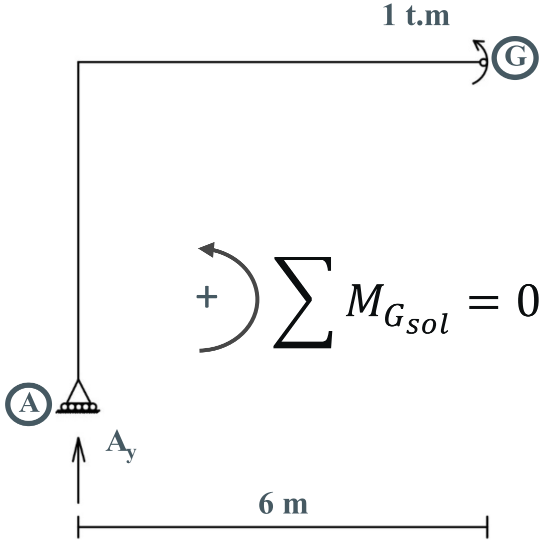


N_0

X$_1$=1 tm birim yüklemesi, Dış yük=0



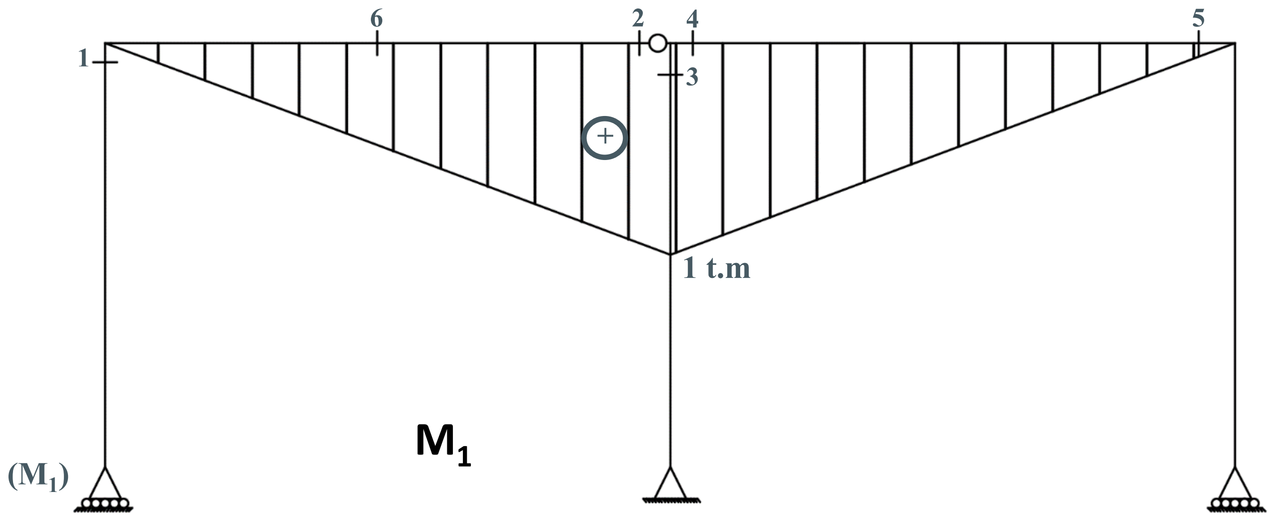




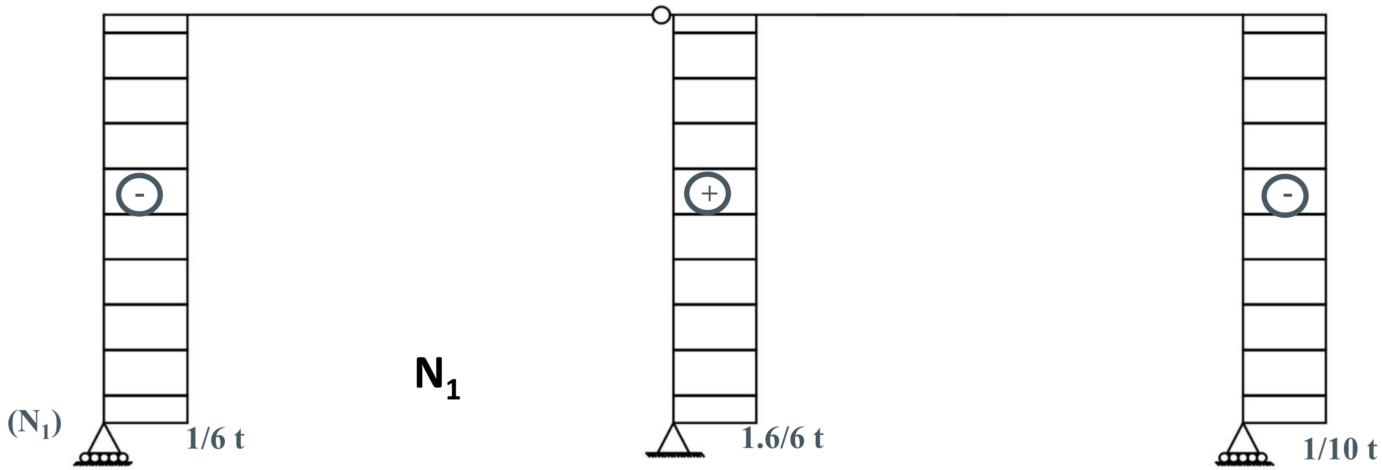
$$+\curvearrowleft \sum M_{G_{sağ}} = 0 \rightarrow -1 + C_y * 10 = 0 \rightarrow C_y = \frac{1}{10}$$

$$+\curvearrowleft \sum M_{G_{sol}} = 0 \rightarrow 1 - A_y * 6 = 0 \rightarrow A_y = \frac{1}{6}$$

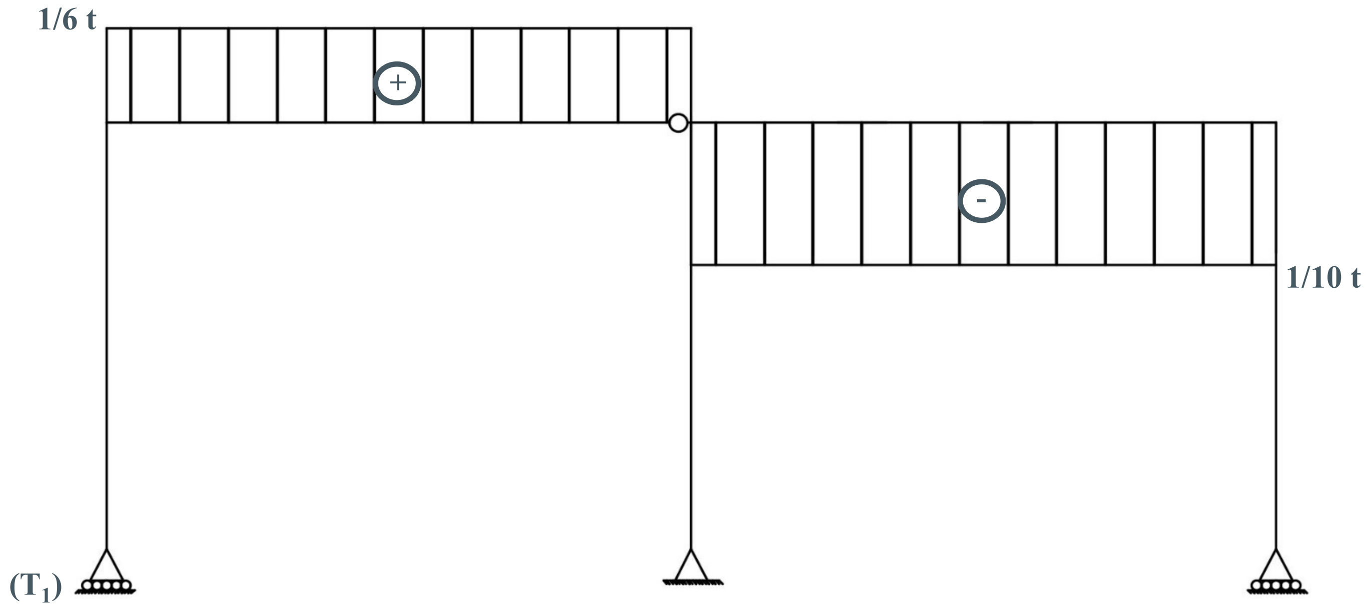
$$A_y + B_y + C_y = 0 \rightarrow B_y = -\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{6}\right) = -\frac{1.6}{6}$$



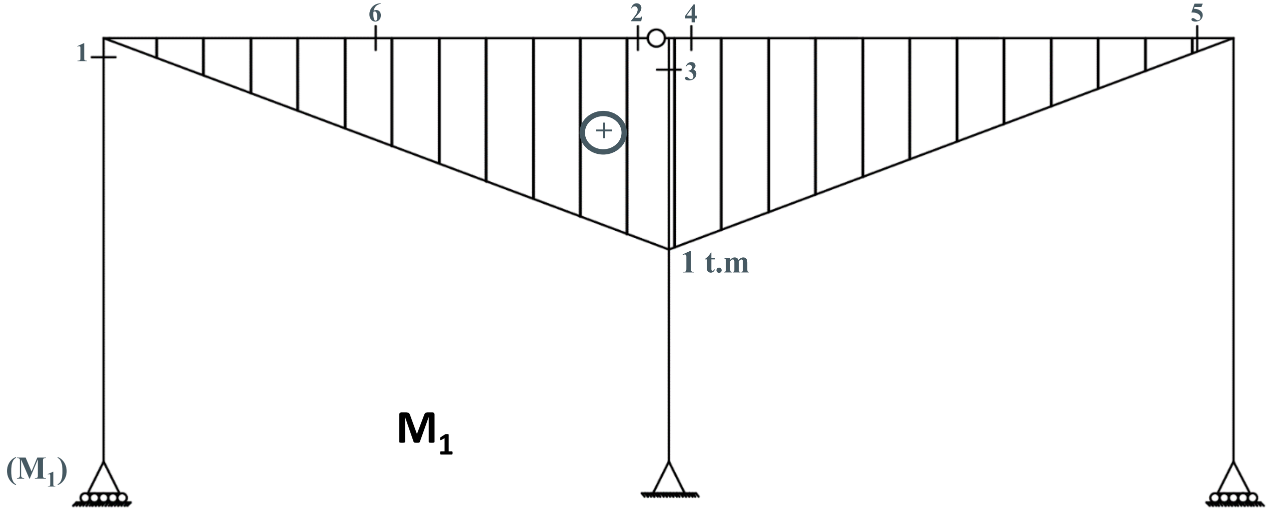
M1



N1

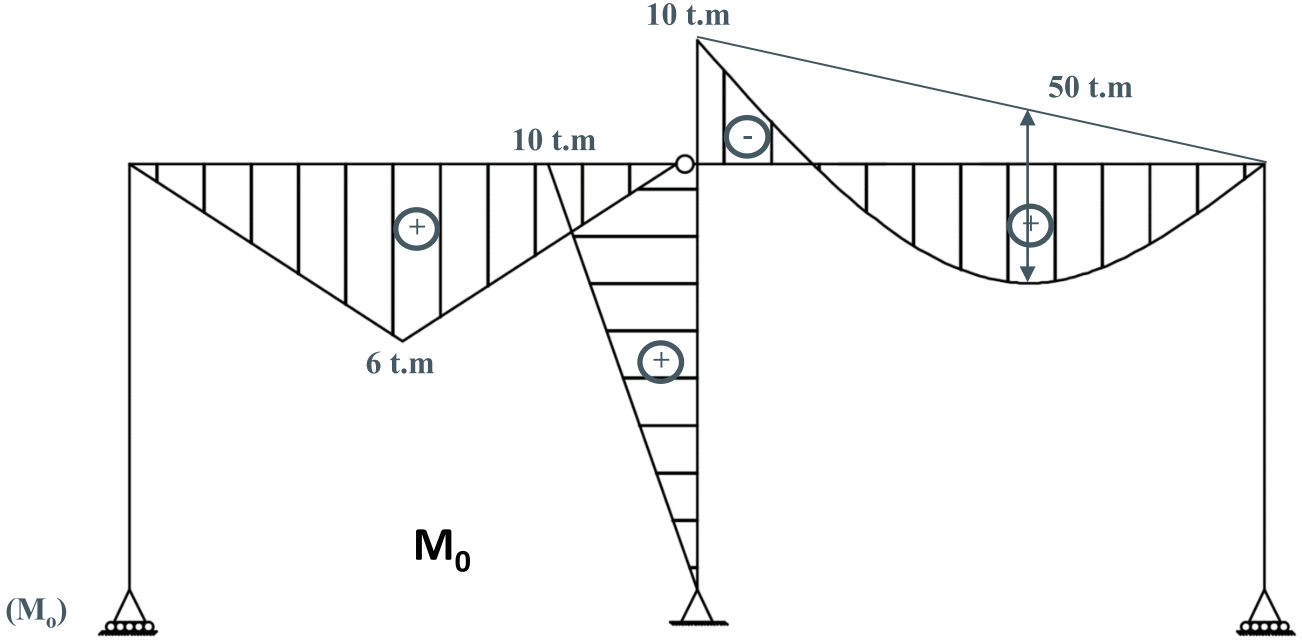


T_1



$$EI_c\delta_{11} = \int M_1 M_1 \left[\frac{I_c}{I}\right] ds$$

$$EI_c\delta_{11} = \frac{1}{3} * 6 * 1 * 1 * [2] + \frac{1}{3} * 10 * 1 * 1 * [2] = 10.67$$



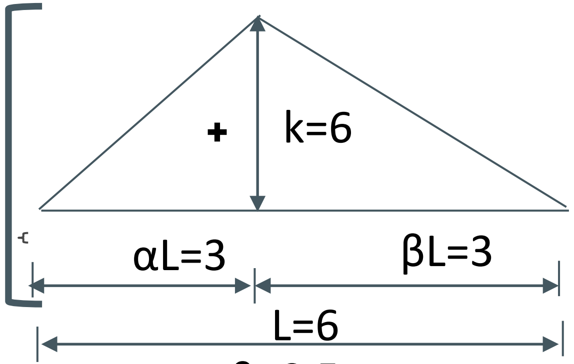
	k k L	k L	k_1 k_2 L	2° k_m L
i i L	Lik	$\frac{1}{2}$Lik	$\frac{1}{2}$Li(k_1 + k_2)	$\frac{2}{3}$Lik$_m$
i L	$\frac{1}{2}$Lik	$\frac{1}{3}$Lik	$\frac{1}{6}$Li(k_1 + 2k_2)	$\frac{1}{3}$Lik$_m$
i L	$\frac{1}{2}$Lik	$\frac{1}{6}$Lik	$\frac{1}{6}$Li(2k_1 + k_2)	$\frac{1}{3}$Lik$_m$

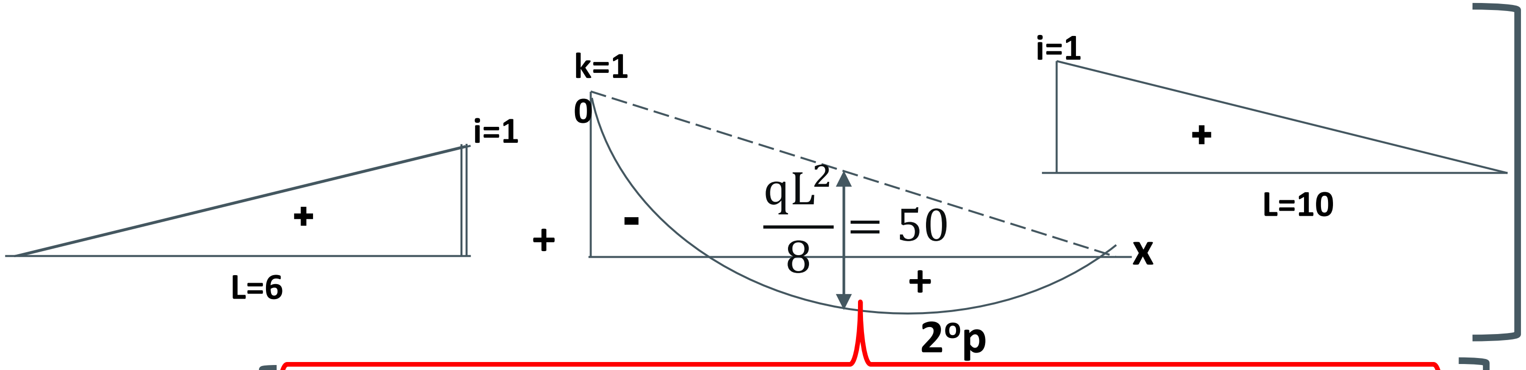
$$EI_c\delta_{10} = \int M_1 M_0 \left[\frac{I_c}{I}\right] ds$$

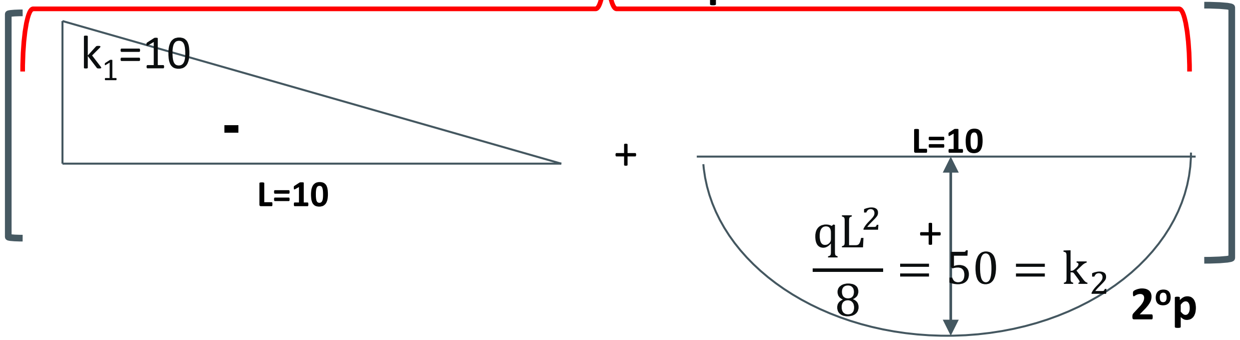
$$EI_c\delta_{10} = \frac{1}{6} * 6 * (1 + 0.5) * 6 * 1 * [2] + \frac{1}{3} * 10 * 1 * (-10) * [2] + \frac{1}{3} * 10 * 1 * 50 * [2] = 234.67$$

$$EI_c\delta_{10} = \int M_1 M_0 \left[\frac{I_c}{I}\right] ds = \frac{1}{6} * 6 * (1 + 0.5) * 6 * 1 * [2] + \frac{1}{3} * 10 * 1 * (-10) * [2] + \frac{1}{3} * 10 * 1 * 50 * [2] = 234.67$$

$$EI_c\delta_{10} = EI_c$$







$$\frac{1}{6} L(1 + \alpha) * i * k$$

ÇARPIM TABLOSU $\left(\int_0^L M_i M_k ds\right)$

	k k L	k L	k_1 k_2 L	2.° k_m L	2.° Y k L	2.° Y k L	k αL βL L
i i L	Lik	$\frac{1}{2}$Lik	$\frac{1}{2}Li(k_1 + k_2)$	$\frac{2}{3}Lik_m$	$\frac{2}{3}$Lik	$\frac{1}{3}$Lik	$\frac{1}{2}$Lik
i L	$\frac{1}{2}$Lik	$\frac{1}{3}$Lik	$\frac{1}{6}Li(k_1 + 2k_2)$	$\frac{1}{3}Lik_m$	$\frac{5}{12}$Lik	$\frac{1}{4}$Lik	$\frac{1}{6}L(1+\alpha)ik$
i L	$\frac{1}{2}$Lik	$\frac{1}{6}$Lik	$\frac{1}{6}Li(2k_1 + k_2)$	$\frac{1}{3}Lik_m$	$\frac{1}{4}$Lik	$\frac{1}{12}$Lik	$\frac{1}{6}L(1+\beta)ik$

$$EI_c\delta_{11}X_1 + EI_c\delta_{10} = 0$$

$$10.67X_1 + 284.67 = 0 \quad \rightarrow X_1 = -26.68$$

$$M = M_0 + M_1X_1$$

$$M_{(1)} = M_{0_{(1)}} + M_{1_{(1)}}X_1 = 0 + 0 + 0 * X_1 = 0$$

$$M_{(2)} = M_{0_{(2)}} + M_{1_{(2)}}X_1 = 0 + 1 * (-26.68) = -26.68\ tm$$

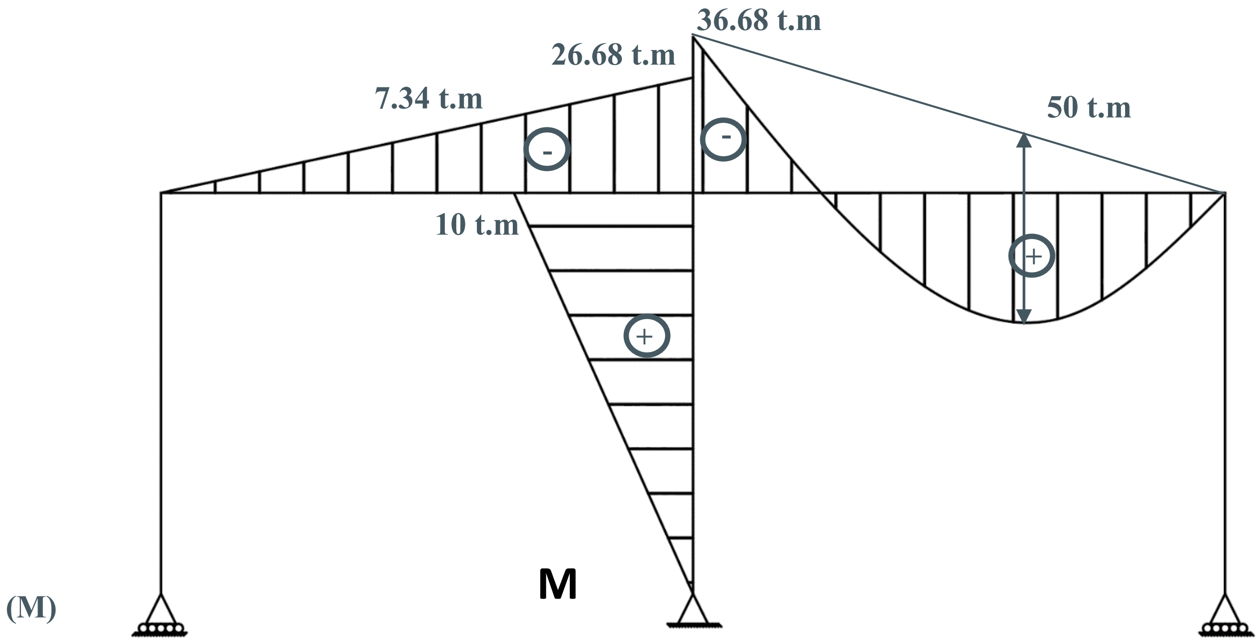
$$M_{(3)} = M_{0_{(3)}} + M_{1_{(3)}}X_1 = 10 + 0 * (-26.68) = 10\ tm$$

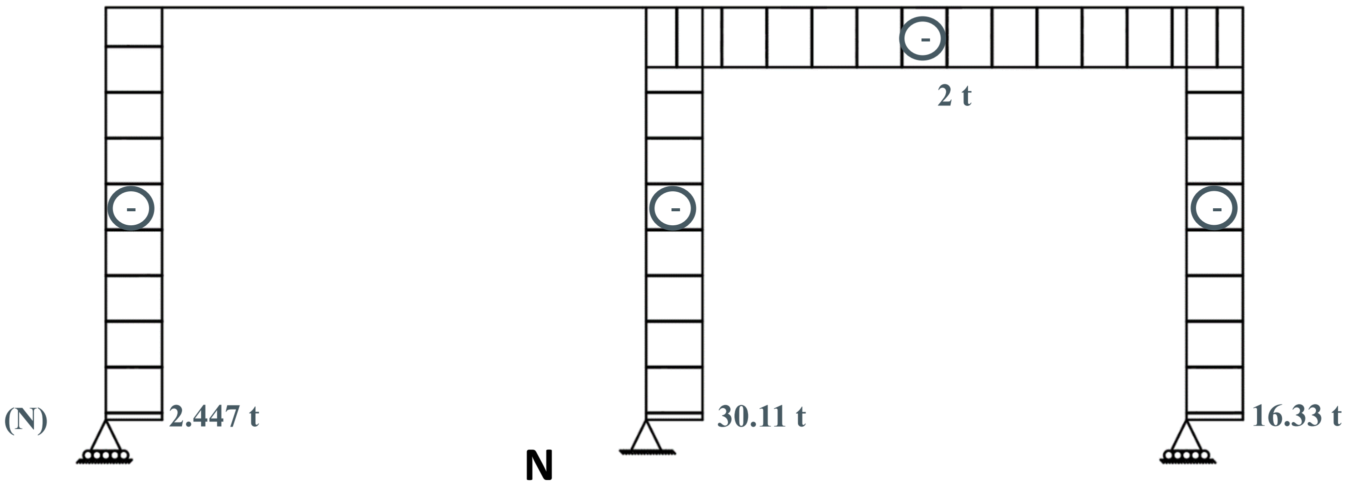
$$M_{(4)} = M_{0_{(4)}} + M_{1_{(4)}}X_1 = 0 + 1 * (-26.68) = -26.68\ tm$$

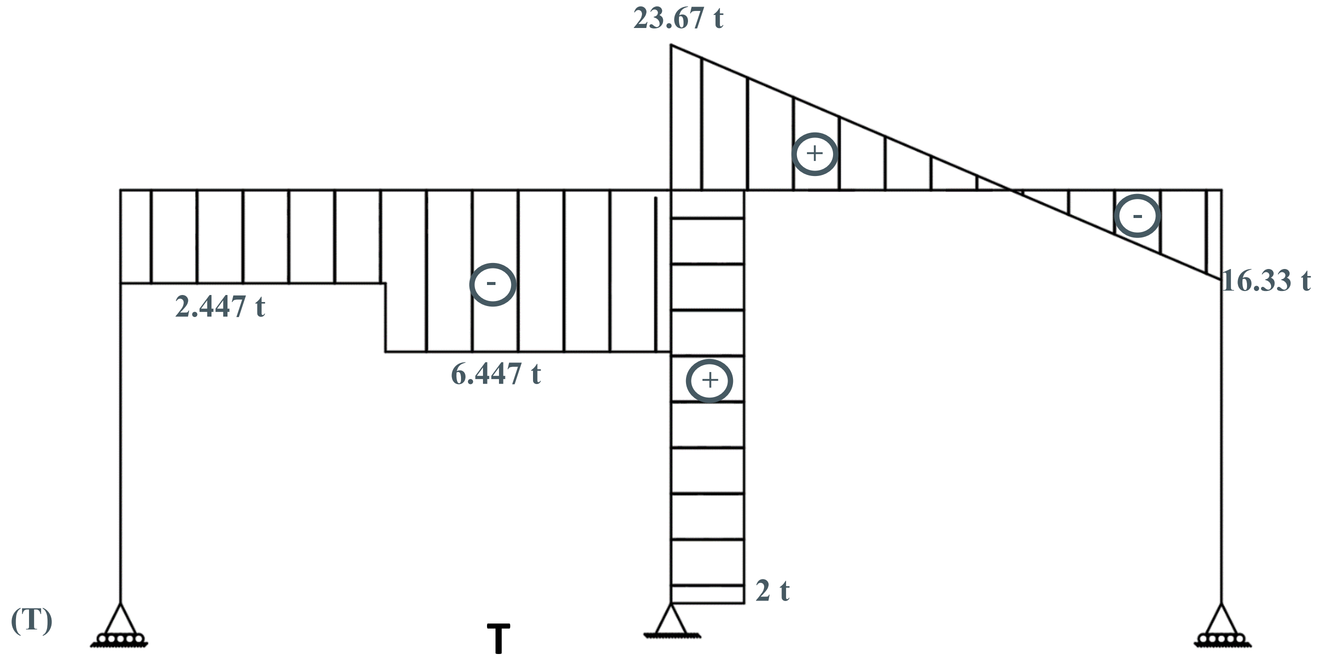
$$M_{(5)} = M_{0_{(5)}} + M_{1_{(5)}}X_1 = 0\ tm$$

$$M_{(6)} = M_{0_{(6)}} + M_{1_{(6)}}X_1 = 6 + 0.5 * (-26.68) = -7.34\ tm$$

$$N = N_0 + N_1X_1 \qquad\qquad T = T_0 + T_1X_1$$

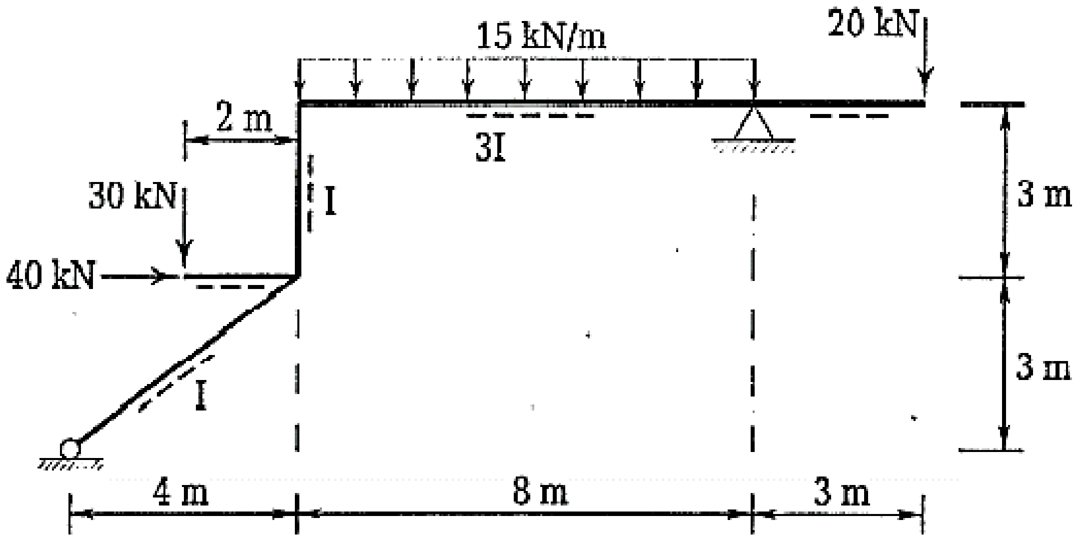

36.68 t.m
26.68 t.m
7.34 t.m
50 t.m
10 t.m
M
(M)


2 t
2.447 t
30.11 t
16.33 t
(N)
N

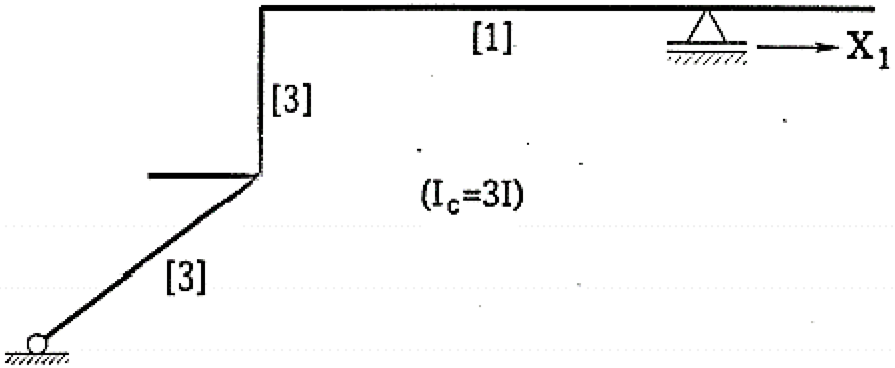

23.67 t
16.33 t
2.447 t
6.447 t
2 t
(T)
T

ÖRNEK 3

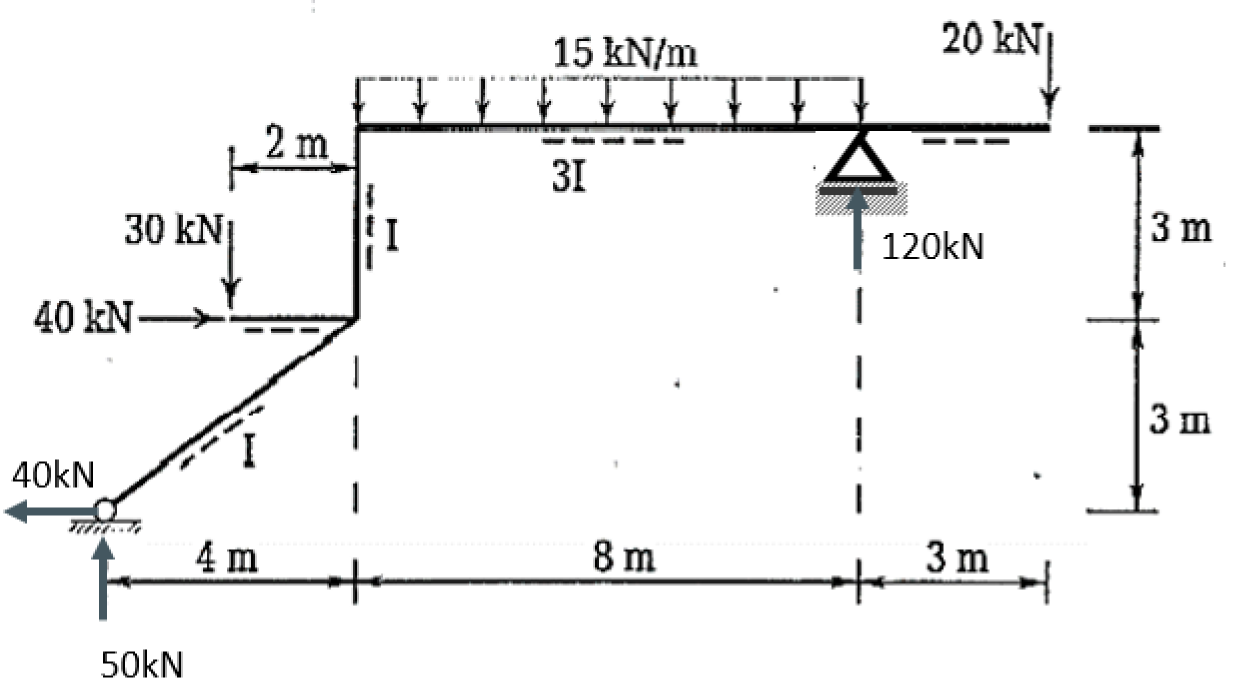
Şekilde verilen sistemde kuvvet yöntemini kullanarak M-N-T diyagramlarını çiziniz.



Şekil 1.1: Yapı sistemi



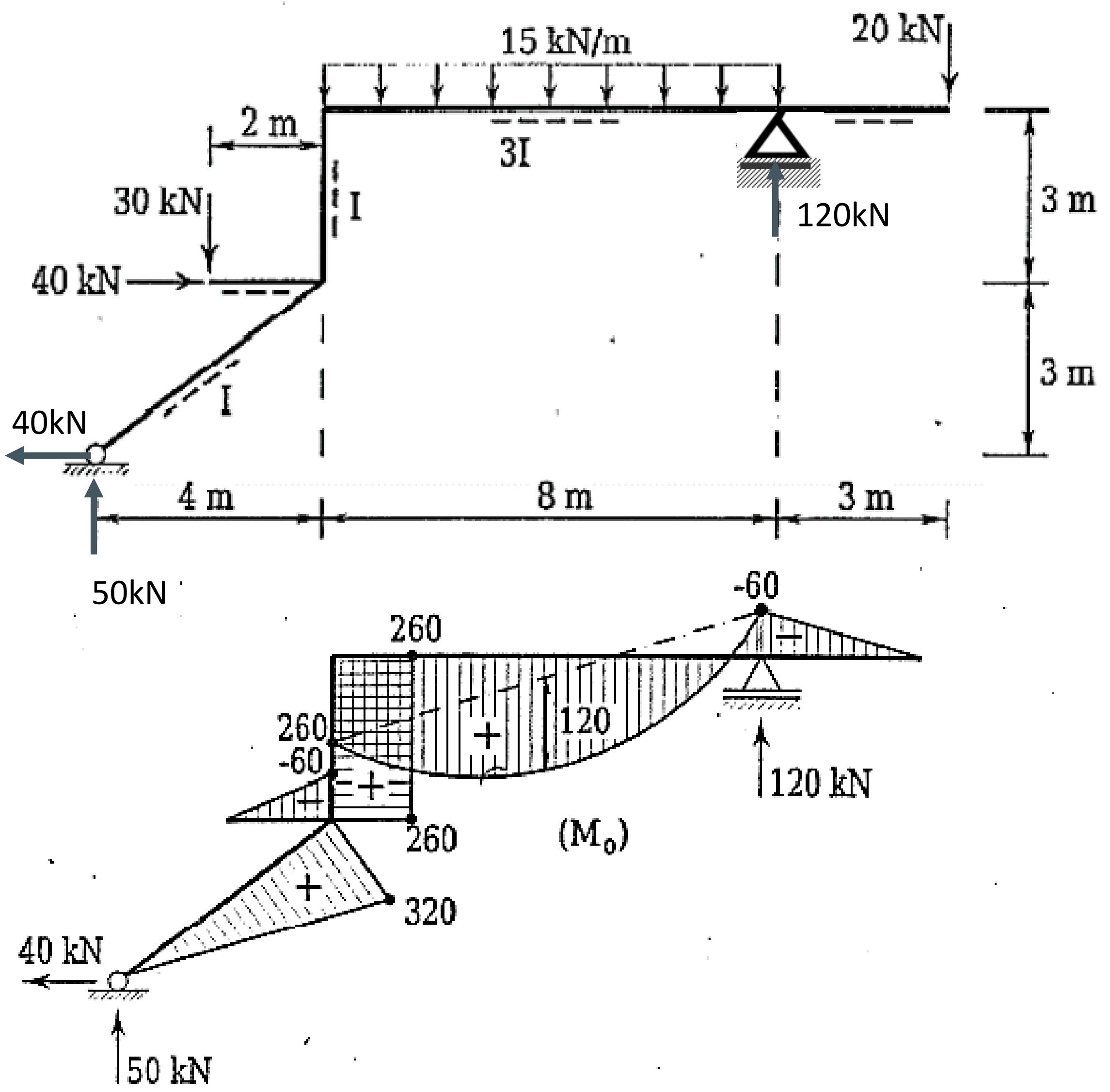
Şekil 1.1a: İzostatik esas sistem ve hiperstatik bilinmeyen



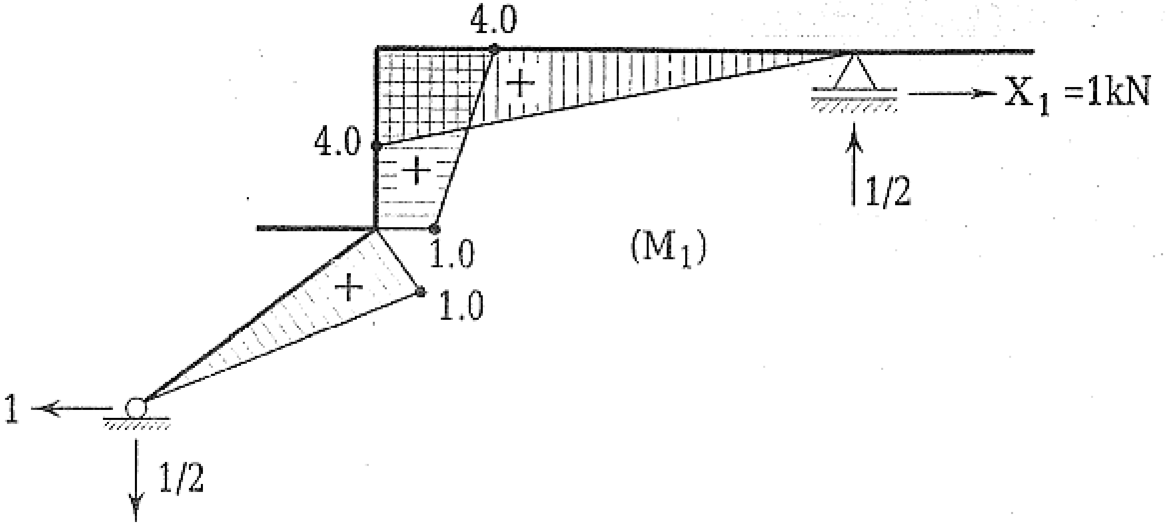
$$\rightarrow^{+} \sum F_x = 0 \ \rightarrow A_x = 40\ kN \quad \uparrow^{+} \sum F_y = 0 \ \rightarrow A_y + B_y = 30 + 20 + 15 * 8 = 170\ kN$$

$$+ \circlearrowleft \sum M_A = 0 \ \rightarrow -20 * 15 + 12 * B_y - 15 * 8 * 8 - 30 * 2 - 40 * 3 = 0 \quad \rightarrow B_y = 120\ kN$$

$$A_y + B_y = 170\ kN \rightarrow A_y = 170 - 120 = 50\ kN$$



Şekil 1.1b: İzostatik esas sistemde dış yüklerden oluşan eğilme momenti diyagramı

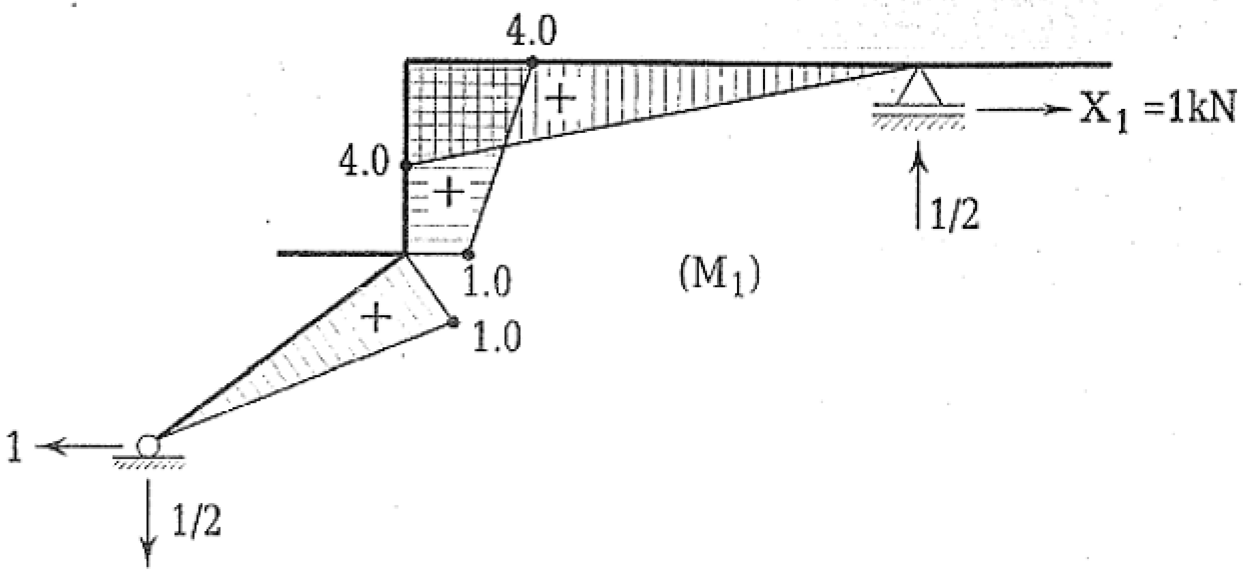


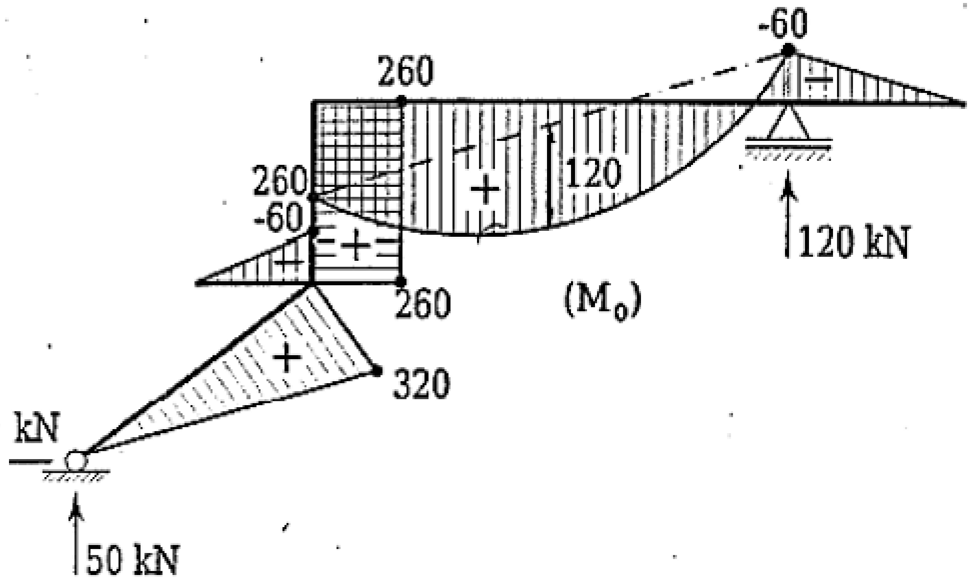
Şekil 1.1c: İzostatik esas sistemde birim yüklemeden oluşan eğilme momenti diyagramı

$$\xrightarrow{+} \sum F_x = 0 \;\rightarrow A_x = 1\ kN \qquad \uparrow^{+} \sum F_y = 0 \;\rightarrow A_y + B_y = 0 \rightarrow A_y = -\frac{1}{2}$$

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \;\rightarrow -1 * 6 + 12 * B_y = 0 \;\rightarrow B_y = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}\ kN$$

$$A_y + \frac{1}{2} = 0 \rightarrow A_y = -\frac{1}{2}$$





$$EI_c\delta_{11} = \frac{1}{3}\times5\times1\times1\times[3]+\frac{1}{6}\times3\times(2\times1\times1+4\times1+1\times4+2\times4\times4)\times[3]+\ldots$$

$$\ldots+\frac{1}{3}\times8\times4\times4\times[1]=110.667$$

$$EI_c\delta_{10} = \frac{1}{3}\times5\times1\times320\times[3]+\frac{1}{2}\times3\times260\times(1+4)\times[3]+\frac{1}{6}\times8\times4\times(2\times260-60)\times[1]+\ldots$$

$$\ldots+\frac{1}{3}\times8\times4\times120\times[1]=11183.33$$

Hiperstatik bilinmeyenin bulunması:

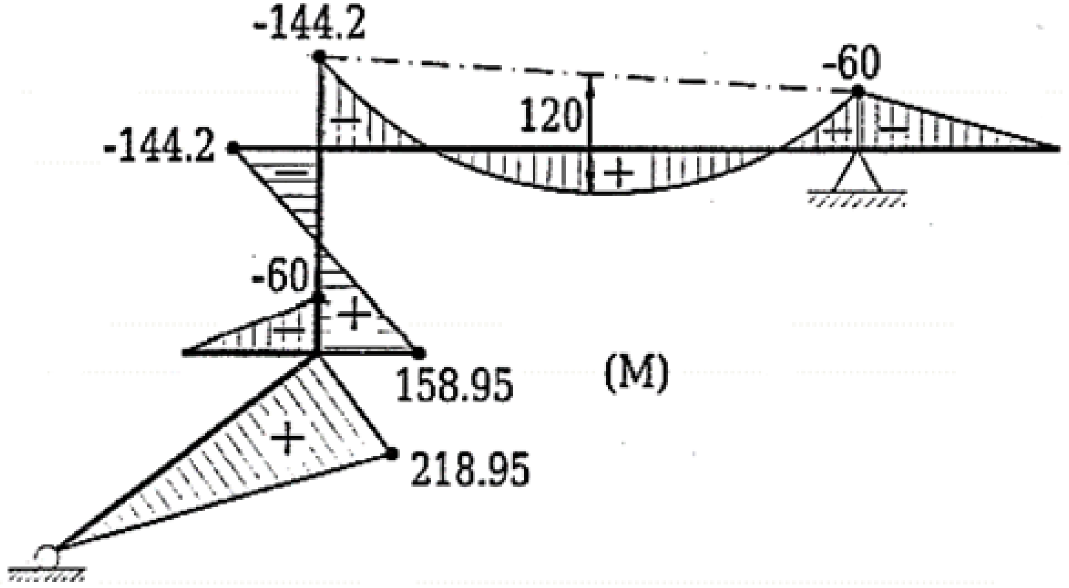
$$110.667\times X_1+11183.33=0 \Rightarrow X_1=-101.05$$

	k k L	k L	k_1 k_2 L	2.° k_m L
i i L	Lik	$\frac{1}{2}$Lik	$\frac{1}{2}$Li(k_1+k_2)	$\frac{2}{3}$Lik$_m$
i L	$\frac{1}{2}$Lik	$\frac{1}{3}$Lik	$\frac{1}{6}$Li(k_1+2k_2)	$\frac{1}{3}$Lik$_m$
i L	$\frac{1}{2}$Lik	$\frac{1}{6}$Lik	$\frac{1}{6}$Li$(2k_1+k_2)$	$\frac{1}{3}$Lik$_m$

Soruda verilen hiperstatik sisteme ait eğilme momenti diyagramının elde edilmesi:

$$M = M_0 - 101.05 \times M_1$$

Elde edilen M diyagramı Şekil 1.1d de verilmiştir.



Şekil 1.1d: Hiperstatik sisteme ait eğilme momenti diyagramı

Kesme kuvveti (T) ve normal kuvvet (N) diyagramlarının elde edilmesi :

$T = T_0 + T_1 X_1$, $N = N_0 + N_1 X_1$ süperpozisyon denklemleri ile

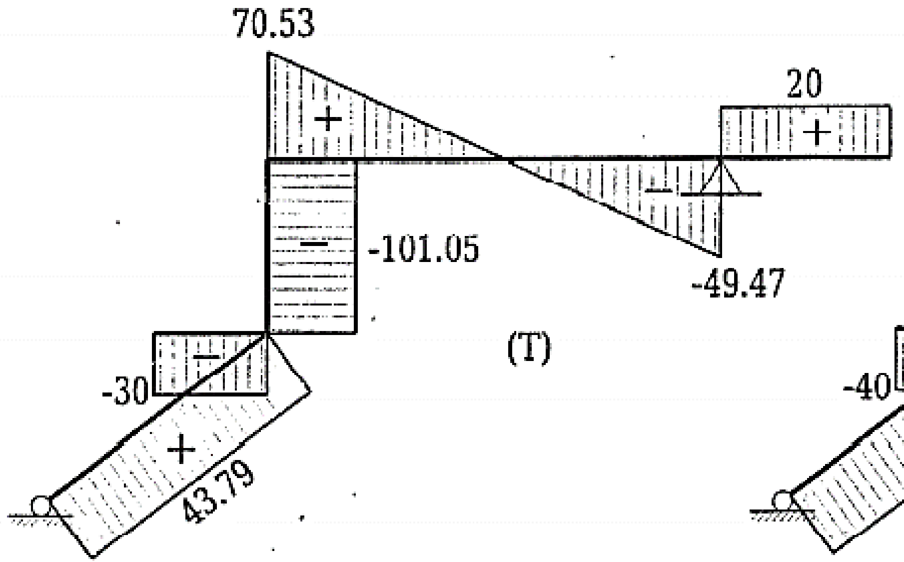
veya

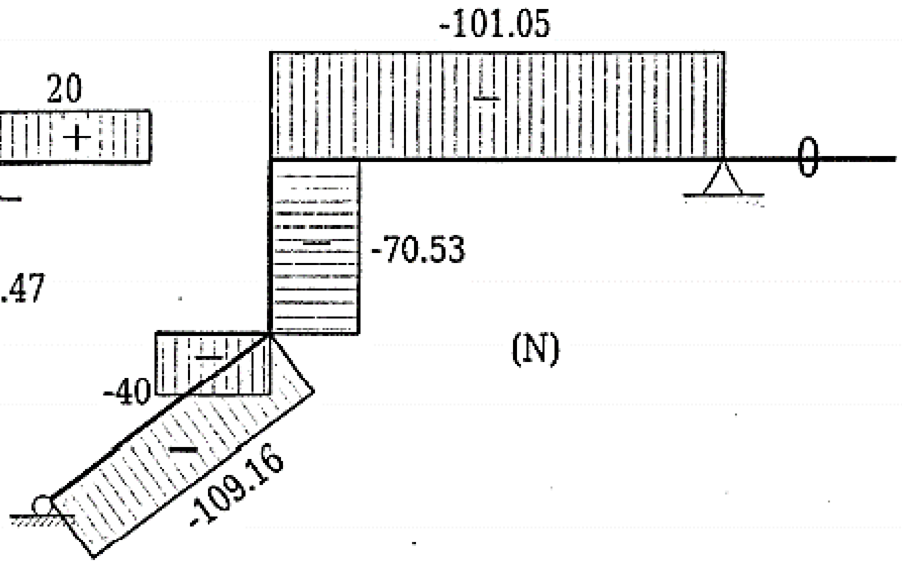
yapı sistemini oluşturan her çubuk için yazılacak denge denklemleri ile kesme kuvveti diyagramı, düğüm noktalarında yazılacak izdüşüm denge denklemleri ile normal kuvvet diyagramı çizilir.

veya

hesaplanan hiperstatik bilinmeyen ve dış yükler altında izostatik esas sistem çözülerek mesnet tepkileri elde edilir. Daha sonra, kritik kesitlerdeki kesit zorları bulunarak kesme kuvveti ve normal kuvvet diyagramları çizilir.

Elde edilen T ve N diyagramları Şekil 1.1e de verilmiştir.





Kapalı Süreklilik Denklemi (KSD) ile Kontrol:

$$\int MM_1 \frac{I_c}{I} ds = 0 \text{ olmalıdır.}$$

$$\frac{1}{3} \times 5 \times 218.95 \times 1 \times [3] + \frac{1}{6} \times 3 \times (2 \times 158.95 \times 1 + 4 \times 158.95 + 1 \times (-144.2) + \ldots$$

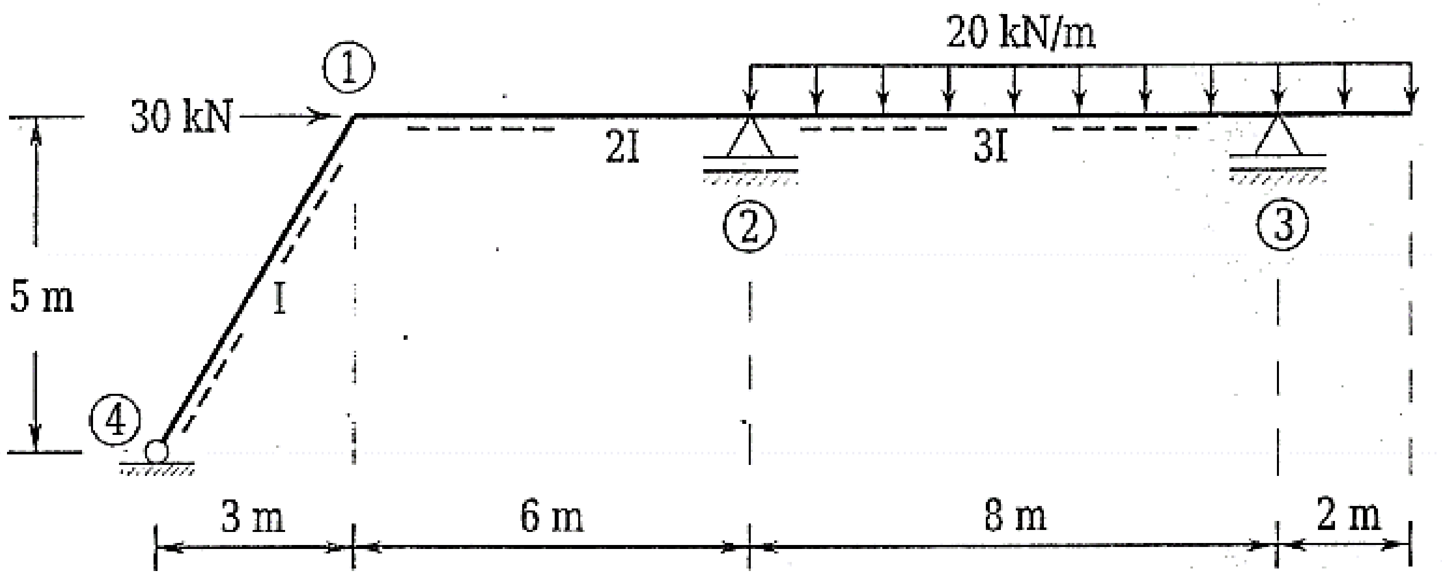
$$\ldots + 2 \times (-144.2) \times 4) \times [3] + \frac{1}{6} \times 8 \times 4 \times (2 \times (-144.2) - 60) \times [1] + \frac{1}{3} \times 8 \times 4 \times 120 \times [1]$$

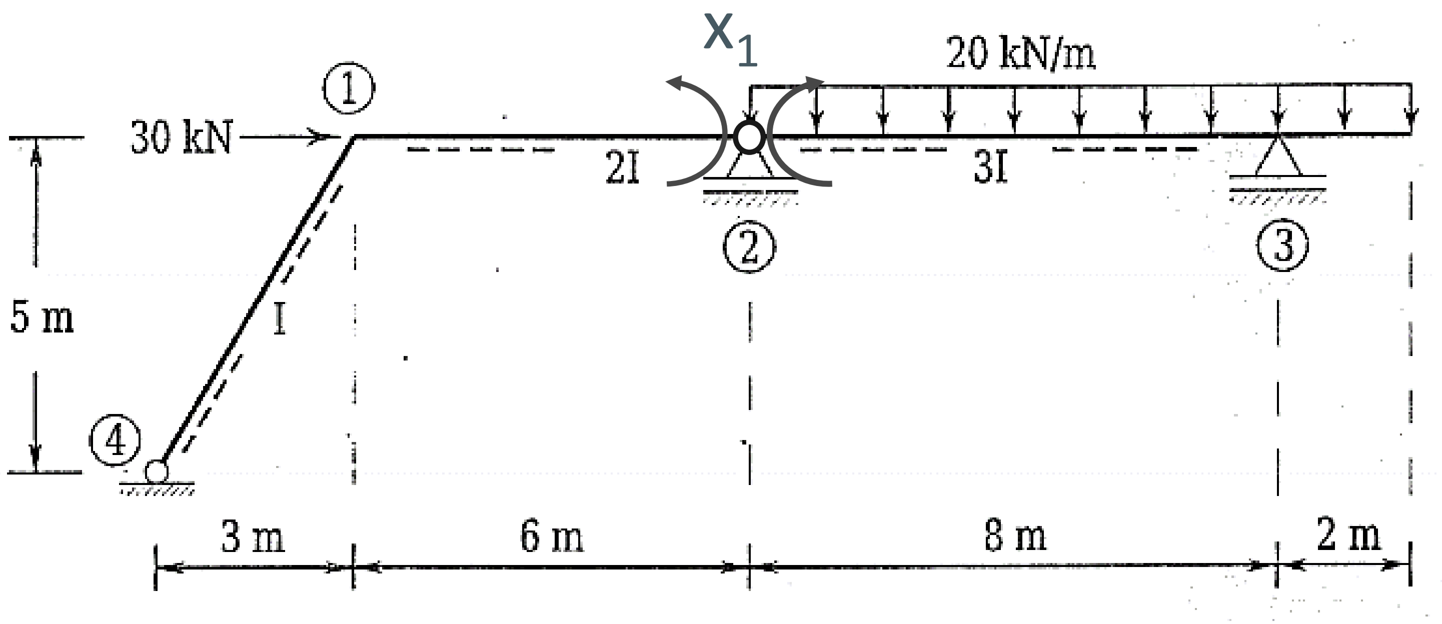
$$= 1094.75 - 516.15 - 1858.13 + 1280 = 2374.75 - 2374.28 = 0.47$$

$$\Rightarrow \text{ rölatif hata : } \frac{0.47}{2374.28} \doteq 0.000198 < 0.005$$

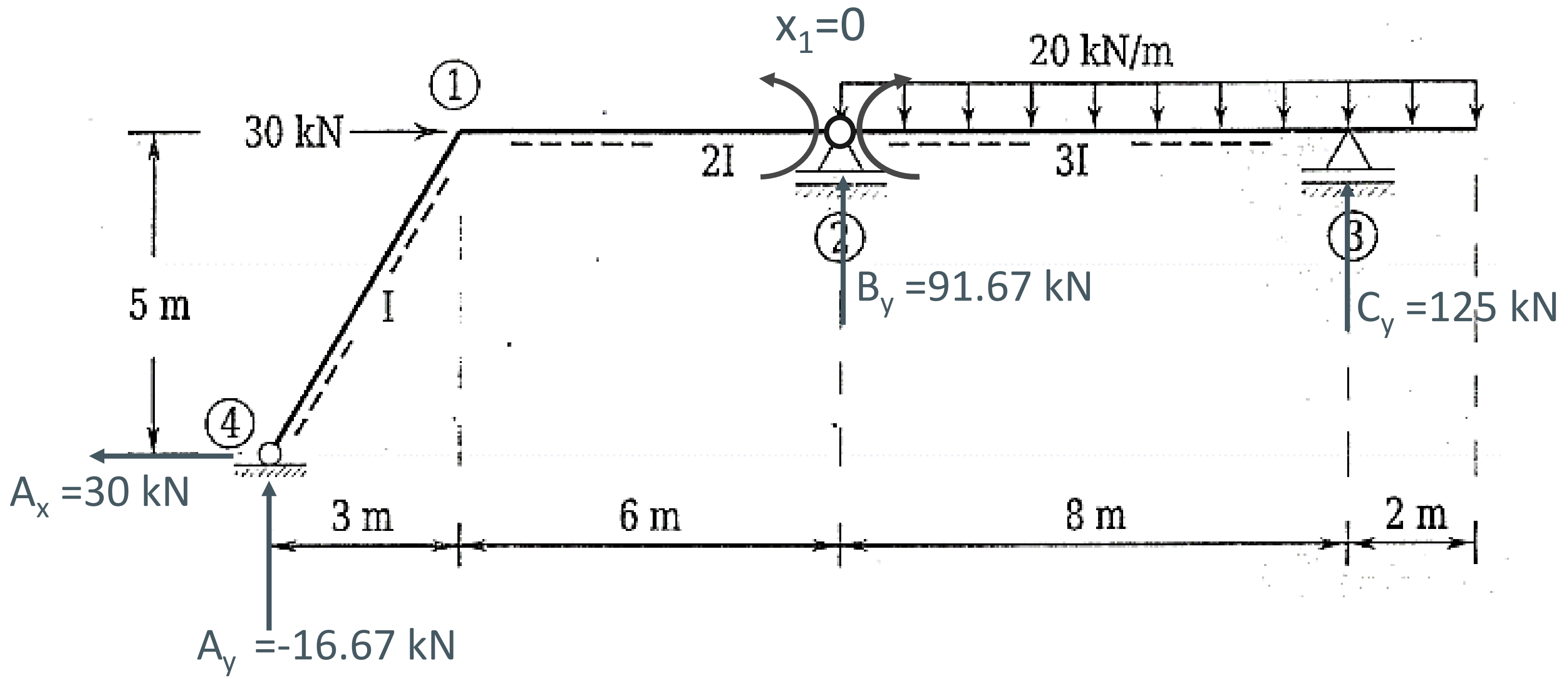
ÖRNEK 4

Şekilde verilen sistemde kuvvet yöntemini kullanarak M-N-T diyagramlarını çiziniz.





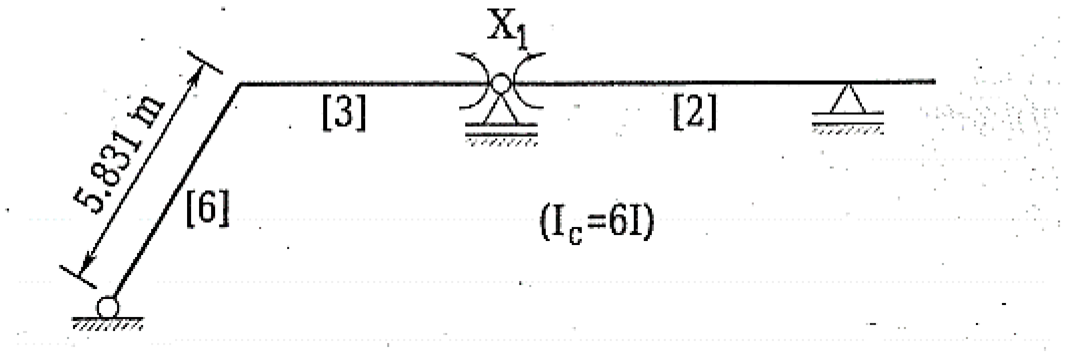
İzostatik esas sistem



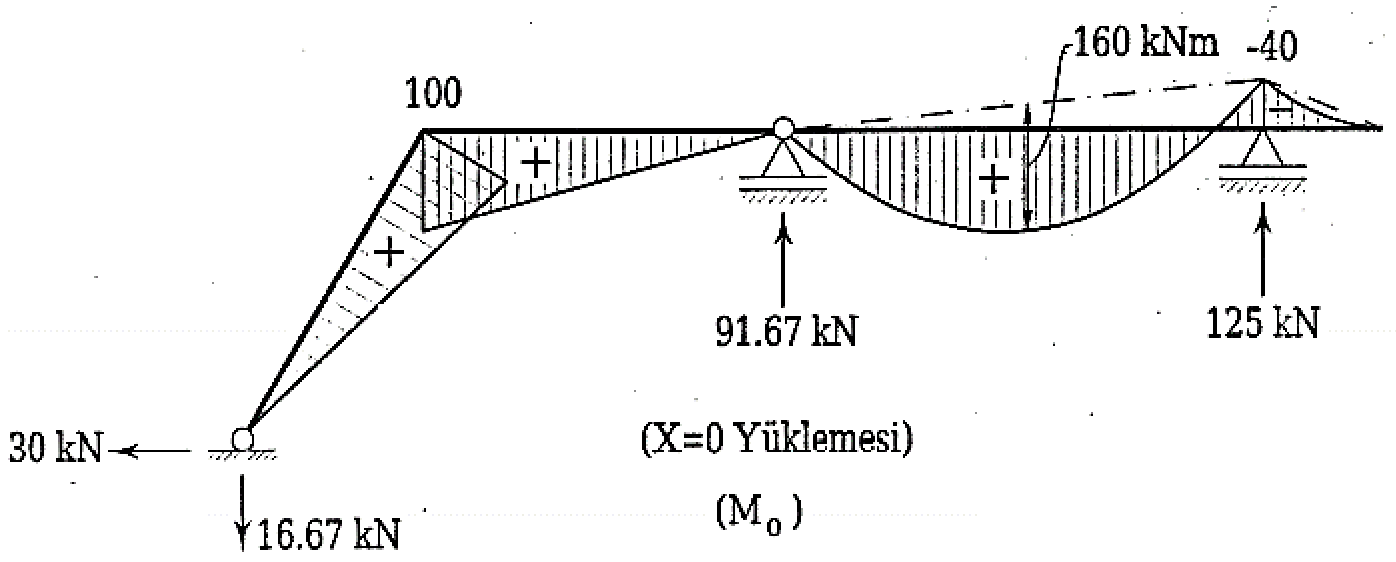
$$\xrightarrow{+} \sum F_x = 0 \ \rightarrow A_x = 30\ kN \quad \uparrow^{+} \sum F_y = 0 \ \rightarrow A_y + B_y + C_y = 20 * 10 = 200\ kN \rightarrow B_y = 200 + 16.67 - 125 = 91.67\ kN$$

$$+ \sum M_{G_{sağ}} = 0 \ \rightarrow 8 * C_y - 20 * 10 * 5 = 0 \rightarrow C_y = \frac{1000}{8} = 125\ kN$$

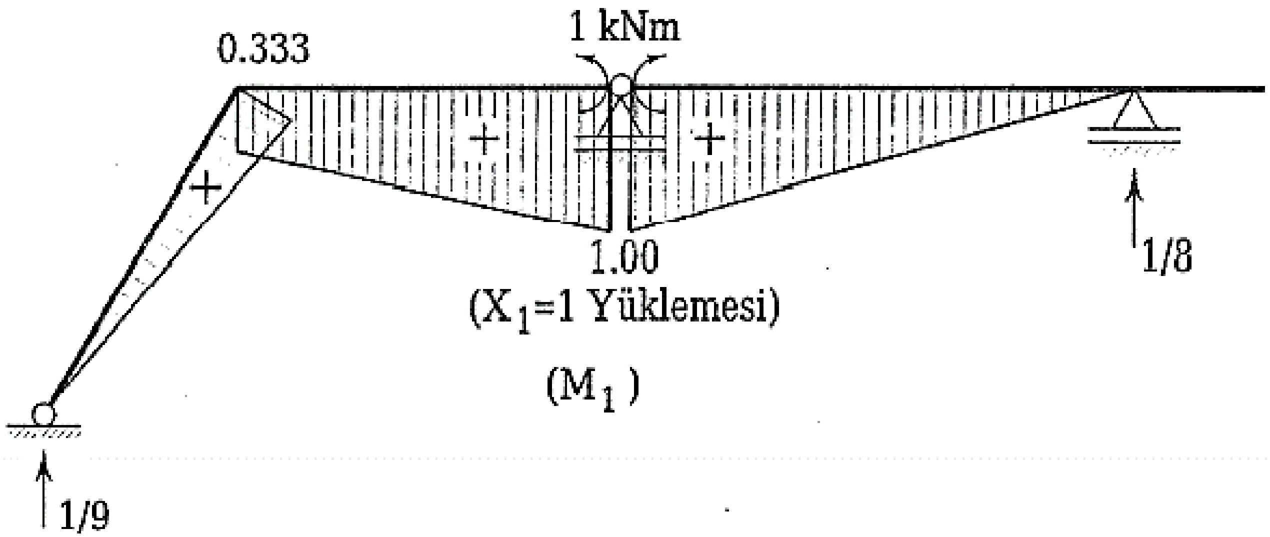
$$+ \sum M_{G_{sol}} = 0 \ \rightarrow -A_y * 9 - A_x * 5 = 0 \rightarrow A_y = -\frac{30 * 5}{9} = -16.67\ kN$$



İzostatik esas sistem ve hiperstatik bilinmeyen



İzostatik esas sistemde dış yüklerden oluşan eğilme momenti diyagramı



	k L k	L k	k_1 L k_2	2.° k_m L
i L i	Lik	$\frac{1}{2}$Lik	$\frac{1}{2}$Li(k_1 + k_2)	$\frac{2}{3}$Lik_m
L i	$\frac{1}{2}$Lik	$\frac{1}{3}$Lik	$\frac{1}{6}$Li(k_1 + 2k_2)	$\frac{1}{3}$Lik_m
i L	$\frac{1}{2}$Lik	$\frac{1}{6}$Lik	$\frac{1}{6}$Li(2k_1 + k_2)	$\frac{1}{3}$Lik_m

İzostatik esas sistemde birim yüklemeden oluşan eğilme momenti diyagramı

$$EI_c\delta_{11} = \frac{1}{3}\times 5.831\times(0.333)^2\times[6]+\frac{1}{6}\times 6\times(2\times(0.333)^2+2\times(0.333)\times 1+\ldots$$

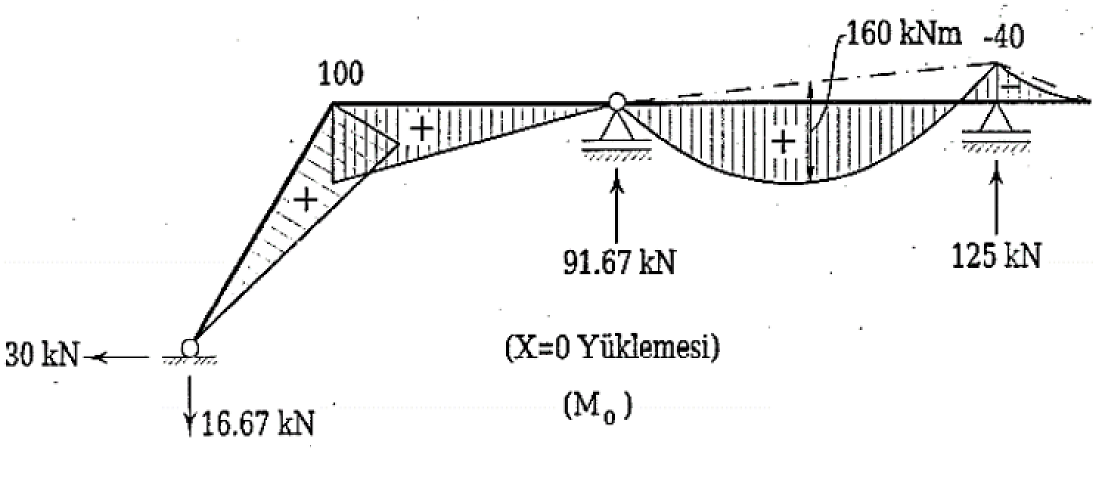
$$\ldots+2\times(1)^2)\times[3]+\frac{1}{3}\times 8\times(1)^2\times[2]=15.289$$

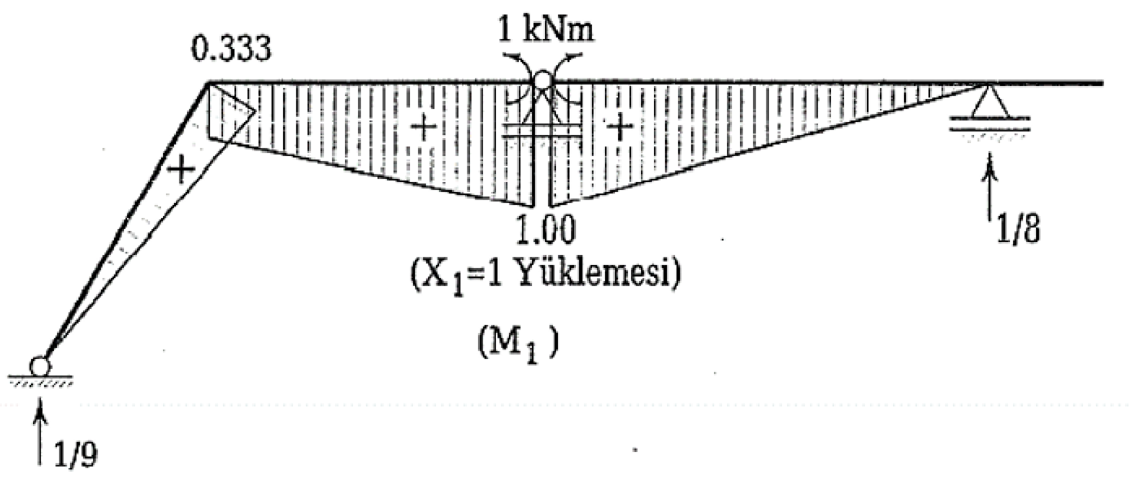
$$EI_c\delta_{10} = \frac{1}{3}\times 5.831\times(0.333)\times 100\times[6]+\frac{1}{6}\times 6\times(2\times(0.333)+1)\times 100\times[3]+\ldots$$

$$\ldots+\frac{1}{6}\times 8\times 1\times(-40)\times[2]+\frac{1}{3}\times 8\times 1\times 160\times[2]=1634.80$$

Hiperstatik bilinmeyenin bulunması:

$$15.289\times X_1+1634.80=0 \Rightarrow X_1=-106.93$$





$$EI_c\delta_{10} = \frac{1}{3}\times 5.831\times(0.333)\times 100\times[6]+\frac{1}{6}\times 6\times(2\times(0.333)+1)\times 100\times[3]+\ldots$$

$$\ldots+\frac{1}{6}\times 8\times 1\times(-40)\times[2]+\frac{1}{3}\times 8\times 1\times 160\times[2]=1634.80$$

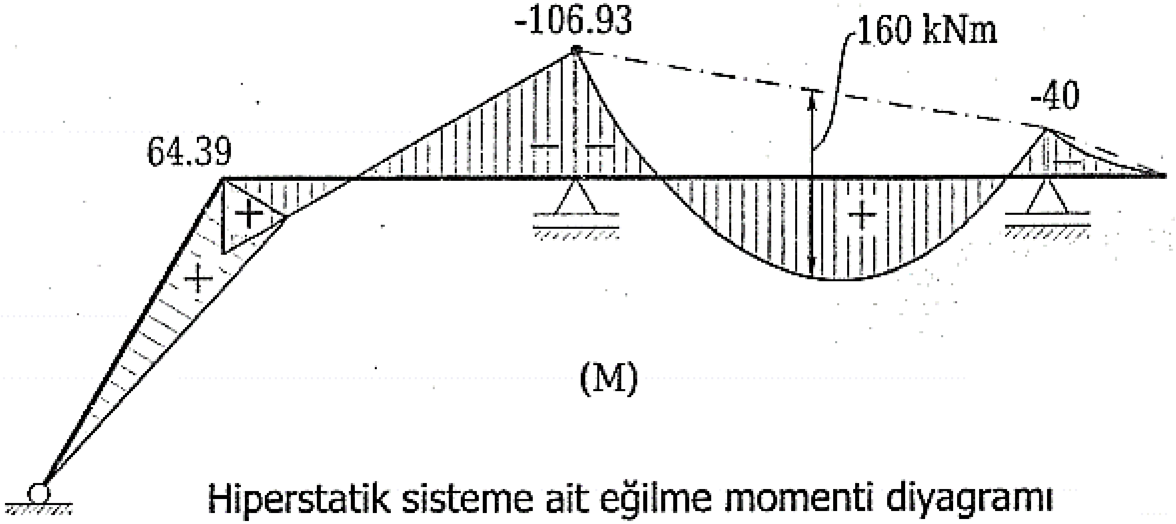
Hiperstatik bilinmeyenin bulunması:

$$15.289\times X_1+1634.80=0 \Rightarrow X_1=-106.93$$

	k (rectangle) k, L	(triangle) k, L	k_1 (trapezoid) k_2, L	2.° k_m (parabola), L
i (rectangle) i, L	Lik	$\frac{1}{2}$Lik	$\frac{1}{2}$Li(k_1+k_2)	$\frac{2}{3}$Lik$_m$
(triangle) i, L	$\frac{1}{2}$Lik	$\frac{1}{3}$Lik	$\frac{1}{6}$Li(k_1+2k_2)	$\frac{1}{3}$Lik$_m$
i (triangle), L	$\frac{1}{2}$Lik	$\frac{1}{6}$Lik	$\frac{1}{6}$Li$(2k_1+k_2)$	$\frac{1}{3}$Lik$_m$

Soruda verilen hiperstatik sisteme ait eğilme momenti diyagramının elde edilmesi:

$$M = M_0 + M_1 X_1 \Rightarrow M = M_0 - 106.93 \times M_1$$
$$M_{14} = M_{12} = 100 + 0.333 \times (-106.93) = 64.39 \text{ kNm}$$
$$M_{21} = M_{23} = 1 \times (-106.93) = -106.93 \text{ kNm}$$
$$M_{32} = -40 \text{ kNm}$$



Hiperstatik sisteme ait eğilme momenti diyagramı

Kapalı Süreklilik Denklemi (KSD) ile Kontrol:

$\int M M_1 \frac{I_c}{I} ds = 0$ olmalıdır.

$$\frac{1}{3} \times 5.831 \times (0.333) \times (64.39) \times [6] + \frac{1}{6} \times 6 \times (2 \times (0.333) \times (64.39) + (0.333) \times (-106.93) + \ldots$$

$$\ldots + 1 \times (64.39) + 2 \times 1 \times (-106.93)) \times [3] + \frac{1}{6} \times 8 \times (2 \times (-106.93) - 40) \times 1 \times [2] + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{3} \times 8 \times 1 \times 160 \times [2] = 1103.39 - 1103.54 = -0.15$$

$$\Rightarrow \text{ rölatif hata : } \frac{0.15}{1103.39} = 0.000136 < 0.005$$